Departamento de Ingeniería Matemática. FCFM-U. de Chile.
MA26A Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Guía #1

Primavera 2006. Profs.: A. Osses - Aux: J. Lemus, N. Carreño

El objetivo de esta primera guía docente del curso es recopilar ejercicios, problemas de control y de modelamiento que involucran EDO's de primer orden entre las que se mencionan a continuación.

- Integración directa: $y' = f(x)$.
- Variables separables: $y' = f(x) \cdot g(y)$.
- Ecuaciones Homogéneas: $y' = h(x, y)$, $h(x, y)$ homogénea grado cero.
- Ecuación de Bernoulli: $y' + P(x)y = f(x)y^n$.
- Ecuación de Ricatti: $y' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2$.
- Método del factor integrante: $y' + P(x)y = R(x)$.
- No aparece $y(x)$ (orden reducible): $G(x, y', y'') = 0$.
- No aparece x (orden reductible): $H(y, y', y'') = 0$.

Ejercicios:

1. Encontrar las soluciones generales de las siguientes EDO's: a)$y' = xy^3$ $\quad$ $b)yy' = x(y^2+1)$
   c)$(x^2 + 1)tg(y)y' = x$ $\quad$ $d)(1 + \sqrt{y})y' = 1 + \sqrt{x}$
   e)$y' = 4x^3(1 + y)$
   NOTA: Tener siempre en cuenta que $\int \frac{1}{x}dx = ln(|x|) + C$.

2. Encontrar las soluciones a los problemas de valor inicial que se exponen a continuación:

   a)$y' = ye^x; \quad y(0) = 2e$
   b)$y' = 2xy^2 + 3x^2y^2; \quad y(1) = 1$
   c)$y' = 3x^2(y^2 + 1); \quad y(0) = 1$
   d)$2yy' = x(x^2 - 16)^{-1/2}; \quad y(5) = 2$ $\quad$ (HINT:$(\sqrt{x})' = 1/(2 \cdot \sqrt{x})$).
   e)$y' + 1 = 2y; \quad y(x_0) = y_0$
   f)$xy' - y = 2x^2y; \quad y(1) = 1$

3. Verifique que las siguientes ecuaciones son homogéneas, de ser así resuélvalas:
   a) $4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0$
   b) $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$
   c) $4x^2 + xy - 3y^2 + y'(-5x^2 + 2xy + y^2) = 0$
   d) $y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$
   e) $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

4. Resuelva las siguientes ecuaciones de Bernoulli:

   a)$xy' + y = y^{-2}$
   b)$xy^2y' + y^3 = xcos(x)$
   c)$x^2y' + y^2 = xy$
   d)$x^2y' - 2xy = 3y^4$

5. La ecuación de Ricatti es de la forma

$$y' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2 \qquad (1)$$

suponiendo que se conoce y_1, solución particular de (1):
a) Demuestre que $y = y_1 + u$ es una familia de soluciones de (1), donde u es solución de

$$\frac{du}{dx} - (Q(x) + 2y_1(x)R(x))u = R(x)u^2 \qquad (2)$$

b) Haciendo una sustitución adecuada, pruebe que (2) puede reducirce a la ecuación lineal:

$$\frac{dw}{dx} + (Q(x) + 2y_1(x)R(x))w = -R(x) \qquad (3)$$

6. Resolver las siguientes ecuaciones de Ricatti:
a)$y' = 2x^2 + y/x - 2y^2; \quad y_1(x) = x$
b)$y' = -2 - y + y^2; \quad y_1(x) = 2$
c)$y' = 1 - x - y + xy^2; \quad y_1(x) = 1$

7. Resuelva las siguientes ecuaciones a variables separables:
$a)(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0 \qquad b)(1 + y^2)dx + xydy = 0$
$c)(1 + y^2)dx = xdy \qquad d)x\sqrt{1 + y^2}dx + y\sqrt{1 + x^2}dy = 0$
$e)x\sqrt{1 + y^2}dx + y\sqrt{1 + x^2}dy = 0; \quad y(x = 0) = 1 \qquad f)yln(y)dx + xdy = 0$
$g)y' = a^{x+y} \qquad h)(1 + e^x)yy' = e^y$
$i)(ln(x) + y^3)dx - 3xy^2dy = 0$

8. Muestre que una ecuación diferencial de la forma $y' = f(ax + by + c)$, donde a,b,c son constantes, se puede reducir a una ecuación con variables separables.

9. Diga si las siguientes ecuaciones diferenciales son exactas y resuélvalas:
a) $x(2x^2 + y^2)dx + y(x^2 + 2y^2)dy = 0$
b) $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$
c)

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0$$

d) $(3x^2tg(y) - \frac{2y^2}{x^3})dx + (x^3sec^2(y) + 4y^3 + \frac{3y^2}{x^2})dy = 0$
e) $(2x + \frac{x^2+y^2}{x^2y})dx = (\frac{x^2+y^2}{xy^2})dy$
f)

$$\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{xdy - ydx}{x^2} = 0$$

g) $(sin(x) + sin(y) + \frac{1}{x})dx + (xcos(x) - cos(y) + \frac{1}{y})dy = 0$
h) $xdx + ydy + x(xdy - ydx) = 0$
i) $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$

10. Resuelva las siguientes EDO's de primer orden:
a) $y' + 2y = x^2 + 2x$
b) $(x^2 + 2x - 1)y' - (x + 1)y = x - 1$
c) $xln(x)y' - y = x^3(3ln(x) - 1)$
d) $(a^2 + x^2)y' + xy = a^2$
e) $2xy' - y = 3x^2$
f) $(x + 1)dy - [2y + (x + 1)^4]dx = 0$
g) $y' = \frac{1}{xsen(y)+2sen(2y)}$
h) $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$
i) $xln(x)y' - (1 + ln(x))y + \frac{1}{2}\sqrt{x}(2 + ln(x)) = 0$
j) $y' + ycos(x) = sin(x)cos(x)$
k) $y' - y = 2xe^{x+x^2}$
l) $xy' - y = x^2sen(x)$
m) $x(x - 1)y' + y = x^2(2x - 1)$

Problemas de Control:

1. (C1-1999-2-Osses) *Reducción de ecuación homogénea generalizada.*

   a) Considere la EDO de primer orden de la forma

   $$y' = F\left(\frac{y}{x}\right), \quad x > 0, \qquad (1)$$

   donde F es una función continua conocida. Mediante la sustitución $z = y/x$ desarrolle un método general para resolver esta EDO. Aplíquelo a la ecuación $y' = (x+y)/(x-y)$.

   b) Considere ahora la EDO

   $$y' = F\left(\frac{ax + by + e}{cx + dy + f}\right), \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}. \qquad (2)$$

   Pruebe que si $ad - bc \neq 0$ la EDO (2) puede llevarse a la forma (1) mediante un cambio de variables del tipo $z = y - \alpha, t = x - \beta$, con α y β constantes elegidas adecuadamente. Aplique este método a la ecuación $y' = (x + y + 4)/(x - y - 6)$.

   c) ¿ Cómo resolvería (2) si $ad - bc = 0$?.

2. (C1-2001-2-Alvarez) *Reducción de ecuación lineal homog'enea de orden 2.* Consideremos la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con condiciones iniciales

   $$(E)\begin{cases} y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \ x \in I \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1 \end{cases}$$

   donde $y_0 > 0$, $y_1 \in \mathbb{R}$ e $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo.

   a) Pruebe que el cambio de variable $v = y'/y$ reduce la ecuación en (E) a la ecuación de Ricatti

   $$\frac{dv}{dx} + v^2 + a_1(x)v + a_0(x) = 0$$

Deduzca que la resolución de (E) es equivalente a la del siguiente sistema de ecuaciones de primer orden

$$(R)\begin{cases} y' = vy \\ \dfrac{dv}{dx} = -v^2 - a_1(x)v - a_0(x) \end{cases}$$

sujeto a una condición inicial apropiada en v (explicítela).

b) Encuentre la ecuación de Ricatti asociada a $y'' - y' - 2y = 0$ y resuelva el sistema (R) correspondiente, encontrando la solución que satisface $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

3. (C1-2001-1-Osses) *Propiedad de las soluciones de la ecuación de Ricatti.* Sean y_1,y_2 dos soluciones distintas de la ecuación de Ricatti: $y' + p(x)y^2 + q(x)y + r(x) = 0$, con p,q y r funciones continuas dadas.
Demuestre que toda otra solución "y" satisface:

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = Ce^{\int p(x)(y_2 - y_1)}, \qquad C \in I\!R.$$

(Suponga que y_1,y_2 e y son derivables con derivada continua.)

Problemas de Modelamiento:

1. (C1-2001-2-Alvarez) *Peso de un ser humano y ley de enfriamiento de Newton.*

a) El peso de un ser humano desde el nacimiento hasta la muerte puede modelarse por la ecuación de Gompertz

$$\frac{dW}{dt} = (a - b \cdot ln(W))W$$

donde a, b son constantes apropiadas no nulas. Encuentre una solución de esta ecuación que satisfaga la condición inicial $W(0) = W_0 > 0$.

b) La ley de enfriamiento de Newton establece que la *tasa de pérdida* de calor desde la superficie de un objeto es proporcional a la diferencia de temperatura entre el medio que lo rodea y su superficie, con constante de proporcionalidad $k > 0$. Sean $S(t)$ y T_0 las temperaturas de la superficie del objeto y del medio respectivamente (la del medio se supone constante para simplificar).

i) Encuentre una ecuación diferencial para $S(t)$ y resuélvala con condición inicial $S(t_0) = S_0 > T_0$.

ii) Pruebe que si además se sabe que $S(t_1) = S_1$ para $t_1 > t_0$ entonces la constante de proporcionalidad está dada por

$$k = \frac{1}{t_1 - t_0} ln\left(\frac{S_0 - T_0}{S_1 - T_0}\right)$$

NOTA: esta fórmula permite calibrar el modelo, i.e. determinar k utilizando mediciones experimentales de temperaturas.

iii) Un objeto a una temperatura de 40^oC se coloca en una habitación a 20^oC. Si en 10 minutos se enfría a 30^oC, ¿ Cuál es la temperatura del objeto al cabo de 20 minutos?.

2. (C1-1999-2-Osses) *Reacción química.* Dos sustancias A y B serán transformadas en un solo compuesto C. Se cumple la ley siguiente: el aumento de la cantidad "y" del compuesto C es proporcional (con constante de proporcionalidad k) al producto de las cantidades de sustancia A y B no trasformadas aún. Suponga que para formar una unidad de compuesto C se necesita de una unidad de A y una unidad de B. Suponga que en t=0 hay a unidades de A, b unidades de B y ninguna de C.

   a) Escriba una ley de transformación (EDO de primer orden para y) justificando cada uno de sus términos.

   b) Resuelva la ecuación diferencial con las condiciones iniciales dadas.

   c) Suponga que $k > 0$. Investigue el comportamiento de y cuando $t \to \infty$

3. (C1-1999-1-Alvarez) *Isótopo radiactivo.* Un isótopo radiactivo se desinegra a una tasa que es proporcional a la masa de isótopo presente.

   a) Si $x(t)$ representa la masa del isótopo al instante t, pruebe que $x(t) = x(0)e^{-\lambda t}$ para alguna constante $\lambda > 0$(llamada constante de desintegración).

   b) El tiempo T en el que la masa del isótopo se reduce a la mitad se denomina *vida media* del isótopo. Sabiendo que la vida media del carbono 14 radiactivo es de 5600 años, determine la masa restante de carbono 14 al cabo de t años, considerando que inicialmente la masa de la muestra era x_0.

   c) Si se sabe que para el año 2000 habrá decaido el 90 % del carbono 14 presente en un cráneo encontrado en el valle central de Chile, determine el año en que falleció el cavernícola a quien perteneció este cráneo.

4. *Curvas de persecución: "La toma del Puente".* Durante la toma del puente Pío Nono, Panchito, un mechón de nuestra facultad, encuentra a un mechón de Derecho, Simón, merodeando en Plaza Italia. Simón al darse cuenta de que es acechado por Panchito, sale corriendo con velocidad w hacia su facultad. Si el mechón de ingeniería corre a una rapidez v constante, y siempre en dirección hacia el mechón de Derecho, encuentre:

   a) La ecuación $y = f(x)$ de la trayectoria del mechón de Ingeniería (curva de persecución).

   b) Determine la condición para que el mechón de Ingeniería pueda alcanzar al mechón de Derecho y determine el punto de encuentro en función de los parámetros a, v y w.

   c) Determine v tal que el punto de encuentro sea antes de que el mechón de Derecho llegue a su facultad.(Considere que la facultad de Derecho tiene coordenadas $(0, L)$).
   NOTA: Considere que el mechón de Derecho se desplaza a lo largo del eje Y, y recuerde que el largo de una curva descrita por una función $y(x)$ se puede calcular como $L(x) = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + (y')^2}dx$.

5. (C1-2000-1-Osses) *Modelo estelar.* Una estrella esferoidal de radio $a > 0$ está compuesta por un fluido compresible cuya presión $p(r)$ y densidad $\rho(r)$ son funciones radiales ($0 \leq r \leq a$) tales que $p = k\rho^2$ con k constante positiva. Si $g(r)$ es la gravedad a una distancia r del centro de la esfera, entonces un balance de momentos y la ley de gravitación nos dan las relaciones:

$$p' = -g(r)\rho(r), \qquad r^2 g(r) = 4\pi G \int_0^r s^2 \rho(s)\, ds$$

donde G es la constante de gravitación universal y las derivadas están tomadas con respecto a r.

   i) Deducir que ρ satisface la ecuación diferencial

$$r\rho'' + 2\rho' + \alpha^2 r\rho = 0, \qquad \alpha^2 = \frac{2\pi G}{k}.$$

   ii) Determine $\rho(r)$ en términos de $\rho(0)$, la densidad del núcleo estelar. Hint.: Resuelva para $(r\rho)''$. Note que $\rho(r)$ debe ser positiva y finita si $r \to 0$.

   iii) Explique por qué este modelo predice estrellas de máximo tamaño $a = \frac{\pi}{\alpha}$.

6. *Problema de estanque.* Un estanque de capacidad Ω litros contiene inicialmente Ω_0 litros de una solución salina de concentración ϵ_0 gramos por litro.
En $t = 0$ entra por la parte superior del estanque una solución de concentración ϵ_1 gramos por litro a una velocidad de v_1 litros por minuto. Al mismo tiempo, por la parte inferior del estanque, empieza a salir solución a v_2 litros por minuto.
Cuando el estanque llega a la mitad de su capacidad (la cantidad de solución va aumentando) se abre una segunda llave que deja escapar solución a v_3 litros por minuto.
Determine la cantidad de sal (en gramos) dentro del estanque para todo instante t (en minutos) inferior a N horas.
Note que se debe cumplir $\frac{\Omega}{2} > \Omega_0$ y $V(t) < \Omega$ para todo $t \in [0, 60N]$ (el tiempo t esta en minutos).