Universidad de Chile
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Primavera 2006

MA26A - Clase Auxiliar #8

Profesor: Axel Osses
Auxiliares: Jorge Lemus, Nicolás Carreño

Problema 1

Sean $A, B \in M_{n\times n}(I\!R)$ matrices constantes. Demostrar que

$$AB = BA \Leftrightarrow e^{At}e^{Bt} = e^{(A+B)t}$$

Hint: Recuerde que $AB = BA \Leftrightarrow Be^{At} = e^{At}B$.

Problema 2

Considere el sistema de ecuaciones: $x'(t) = Ax(t)$, con $A \in M_{n\times n}(I\!R)$ matriz constante. Sea $\phi(t)$ la matriz fundamental del sistema anterior con $\phi(0) = I$. Demuestre la conmutatividad de A con $\phi(t)$.

Problema 3

Considere el sistema: $x'(t) = Ax(t) + e^{\lambda t}b$, con $A \in M_{n\times n}(I\!R)$ matriz constante, $b \in I\!R^n$, y λ un real que no es valor propio de A. Determine un vector constante C tal que el sistema anterior admita una solución de la forma $x(t) = e^{\lambda t}C$.

Problema 4

Sea $A(t) \in M_{n\times n}(I\!R)$ con coeficientes variables continuos. Considere el sistema

$$X'(t) = A(t)X(t) \qquad (1)$$

y el sistema adjunto:

$$Y'(t) = -A^T(t)Y(t) \qquad (2)$$

Si $M(t)$ es una matriz fundamental de (1) y $N(t)$ de (2), probar que $N^T(t)M(t)$ es constante y que $Y^T(t)X^T(t)$ es también constante.

Problema 5

1. Sean $C \geq 0$, f y g dos funciones continuas y positivas en $[0, T]$. Pruebe que si

$$f(x) \leq C + \int_0^x g(s)f(s)ds, \forall x \in [0, T]$$

entonces

$$f(x) \leq C\exp(\int_0^x g(s)ds), \forall x \in [0, T]$$

2. Sean y y z soluciones de los problemas de Cauchy en $[0, T]$

$$y' = f(x, y), \qquad y(0) = y_0$$
$$z' = f(x, z), \qquad z(0) = z_0$$

Suponga que f es continua en sus dos variables y globalmente Lipschitz con respecto a su segunda variable. Pruebe que las soluciones existen y son únicas en $[0, T]$, y que existe $L > 0$ tal que

$$\sup_{x\in[0,T]} |y(x) - z(x)| \leq |y_0 - z_0| \exp(LT)$$