

## TEMA 3

# Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

### 3.1 Generación de los sistemas de ecuaciones diferenciales

Definimos en primer lugar la **congruencia de curvas**. Dadas dos curvas

$$\begin{cases} F(x, y, z, \lambda, \mu) = 0 \\ G(x, y, z, \lambda, \mu) = 0 \end{cases}$$

se dice que forman una congruencia si por cada punto  $(x_0, y_0, z_0)$  pasa sólo una curva de la congruencia. Se pueden escribir entonces

$$\begin{cases} \lambda = \varphi_1(x, y, z) \\ \mu = \varphi_2(x, y, z) \end{cases}$$

De forma más formal, se llama congruencia de curvas a una familia de curvas

$$\begin{cases} f(x, y, z, \lambda, \mu) = 0 \\ g(x, y, z, \lambda, \mu) = 0 \end{cases}$$

que dependen de los parámetros  $\lambda$  y  $\mu$  de forma que por cada punto del espacio pasa una sola curva de la familia, con lo que el sistema anterior determina  $\lambda$  y  $\mu$  como funciones de  $x, y$  y  $z$ :

$$\begin{cases} \lambda = \varphi_1(x, y, z) \\ \mu = \varphi_2(x, y, z) \end{cases}$$

Si entre  $\lambda$  y  $\mu$  se establece una relación de dependencia biunívoca

$$\psi(\lambda, \mu) = 0$$

con  $\psi$  continua, la congruencia se reduce a un haz de curvas que dependen de un solo parámetro. Al variar éste de forma continua, las curvas engendran una superficie si se eliminan  $\lambda$  y  $\mu$ :

$$\psi(\varphi_1(x, y, z), \varphi_2(x, y, z)) = 0$$

En todas estas curvas se considera a  $x$  como la variable independiente, siendo  $y$  y  $z$  dependientes de  $x$ . Si se derivan las expresiones de  $\lambda$  y  $\mu$  con respecto a  $x$  queda

$$\begin{cases} 0 = \varphi'_{1x} + \varphi'_{1y} \frac{dy}{dx} + \varphi'_{1z} \frac{dz}{dx} \\ 0 = \varphi'_{2x} + \varphi'_{2y} \frac{dy}{dx} + \varphi'_{2z} \frac{dz}{dx} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\varphi'_{1x} = \varphi'_{1y} \frac{dy}{dx} + \varphi'_{1z} \frac{dz}{dx} \\ -\varphi'_{2x} = \varphi'_{2y} \frac{dy}{dx} + \varphi'_{2z} \frac{dz}{dx} \end{cases}$$

Podemos despejar las derivadas de  $y$  y  $z$  con respecto a  $x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} -\varphi'_{1x} & \varphi'_{1z} \\ -\varphi'_{2x} & \varphi'_{2z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi'_{1y} & \varphi'_{1z} \\ \varphi'_{2y} & \varphi'_{2z} \end{vmatrix}} = \frac{P(x, y, z)}{Q(x, y, z)}$$

y

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} \varphi'_{1y} & -\varphi'_{1x} \\ \varphi'_{2y} & -\varphi'_{2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi'_{1y} & \varphi'_{1z} \\ \varphi'_{2y} & \varphi'_{2z} \end{vmatrix}} = \frac{R(x, y, z)}{Q(x, y, z)}$$

Esto se puede escribir de forma simétrica:

$$\frac{dy}{P} = \frac{dx}{Q} = \frac{dz}{R}$$

## 3.2 Sistemas de $n$ ecuaciones diferenciales de primer orden

Se define un **sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden** como el siguiente sistema

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

El Problema de Valor Inicial estará formado por ese conjunto de ecuaciones y las condiciones iniciales siguientes

$$x_i(t_0) = x_{i_0} \quad \forall i = 1 : n$$

### 3.2.1 Teorema de Existencia y Unicidad de soluciones

- Si todas las  $f_i$  son continuas,  $\forall i$  en un entorno de las condiciones iniciales, y
- existen  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ ,  $\forall i = 1 : n$ ,  $\forall j = 1 : n$ , y están acotadas

Entonces el Problema de Valor Inicial tiene solución única.

## 3.3 Sistemas de $n$ ecuaciones diferenciales de primer orden lineales

Las funciones  $f_i$  corresponden con ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{cases}$$

Escrito en forma matricial

$$\overline{X}'(t) = A(t) \cdot \overline{X} + \overline{B}(t)$$

con

$$\overline{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\overline{X}(t)}{dt} = \overline{X}'(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} \end{pmatrix}$$

$$\overline{B}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

y

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

Se puede escribir una ecuación diferencial lineal de orden  $n$  como un sistema de ecuaciones lineales de primer orden:

$$a_0(t) y^{(n)} + a_1(t) y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t) y' + a_n(t) y = f(t)$$

con

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dt^n}$$

Si se hacen los cambios

$$\begin{cases} y = x_1 \\ y' = x_2 \\ \vdots \\ y^{(n-1)} = x_n \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_3 \\ \vdots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n \\ \frac{dx_n}{dt} = \frac{1}{a_0(t)} (f(t) - a_n(t) x_1 - a_{n-1}(t) x_2 - \dots - a_1(t) x_n) \end{cases}$$

### 3.4 Reducción a una sola ecuación diferencial de orden superior

Un sistema de ecuaciones diferenciales se puede resolver reduciéndolo a una sola ecuación diferencial de orden superior. Si se tienen  $f_i$  continuas tales que existen sus derivadas parciales con respecto a todos sus argumentos hasta el orden  $n - 1$  (y todas continuas), el sistema

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

se puede convertir en una ecuación diferencial, si escogemos una de sus variables, por ejemplo  $x_1$  y calculamos sus derivadas sucesivas con respecto a  $t$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} = F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}x_1}{dt^{n-1}} = F_{n-1}(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

Con ello obtenemos un sistema de  $n - 1$  ecuaciones. Tendrá solución si

$$J = \frac{\partial (f_1, F_2, F_3, \dots, F_{n-1})}{\partial (x_2, x_3, \dots, x_n)} \neq 0$$

En caso contrario, escogemos otra variable  $x_i$  y repetimos las derivadas.

Hallamos  $x_2, x_3, \dots, x_n$  como funciones de  $x_1$  y sus derivadas para poder expresar

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} = F_n(t, x_1, \dots, x_n) = G\left(t, x_1, x_1', \dots, x_1^{(n-1)}\right)$$

que es una ecuación diferencial de orden superior.

#### **Ejemplo:**

Dado el sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 2z \\ \frac{dz}{dt} = 2x + 2y \end{cases}$$

tomamos la variable  $x$  y el sistema nos queda

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z = f_1 \\ \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = 4x + 2y - 2z = F_2 \end{cases}$$

Y su Jacobiano es distinto de cero:

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

así que escribimos  $y$  y  $z$  en función de  $x$  y sus derivadas:

$$4z = 2 \frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2} + 4x \Rightarrow z = \frac{1}{2} \frac{dx}{dt} - \frac{1}{4} \frac{d^2x}{dt^2} + x$$

$$y = \frac{dx}{dt} - z = \frac{1}{2} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{4} \frac{d^2x}{dt^2} - x$$

Y la tercera derivada de  $x$  se puede expresar como

$$\begin{aligned} \frac{d^3x}{dt^3} &= 4 \frac{dx}{dt} + 2 \frac{dy}{dt} - 2 \frac{dz}{dt} \\ &= 4x' + 2(2x - 2z) - 2(2x + 2y) \\ &= 4x' - 4(z + y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

por tanto nuestra ecuación de orden superior es

$$\frac{d^3x}{dt^3} = 0$$

con lo que la solución general es

$$x = (c_1 t^2 + c_2 t + c_3)$$

Derivamos la expresión

$$\begin{cases} x' = 2c_1 t + c_2 \\ x'' = 2c_1 \end{cases}$$

y las otras dos soluciones son

$$\begin{cases} z = \frac{1}{2} (2c_1 t + c_2) - \frac{1}{4} (2c_1) + c_1 t^2 + c_2 t + c_3 \\ y = 2c_1 t + c_2 - z \end{cases}$$

■

## 3.5 Sistemas de orden superior

Estos sistemas son los que tienen las variables derivadas en un orden superior a 1:

$$\begin{cases} x_1^{(p_1)} = f_1(t, x_1, x_1', \dots, x_1^{(p_1-1)}, x_2, x_2', \dots, x_2^{(p_2-1)}, \dots, x_k, x_k', \dots, x_k^{(p_k-1)}) \\ x_2^{(p_2)} = f_2(t, x_1, x_1', \dots, x_1^{(p_1-1)}, x_2, x_2', \dots, x_2^{(p_2-1)}, \dots, x_k, x_k', \dots, x_k^{(p_k-1)}) \\ \vdots \\ x_k^{(p_k)} = f_k(t, x_1, x_1', \dots, x_1^{(p_1-1)}, x_2, x_2', \dots, x_2^{(p_2-1)}, \dots, x_k, x_k', \dots, x_k^{(p_k-1)}) \end{cases}$$

Para resolver estos sistemas haremos cambios de variables de forma que el sistema que quede sea de ecuaciones de primer orden. Por ejemplo, para el sistema de ecuaciones de segundo orden

$$\begin{cases} x_1'' = f_1(t, x_1, x_1', x_2, x_2') \\ x_2'' = f_2(t, x_1, x_1', x_2, x_2') \end{cases}$$

se convierte en

$$\begin{cases} x_1' = x_3 \\ x_2' = x_4 \\ x_3' = f_1(t, x_1, x_3, x_2, x_4) \\ x_4' = f_2(t, x_1, x_3, x_2, x_4) \end{cases}$$

que generará una ecuación diferencial de orden 4 al reducirla por el método anteriormente explicado.

## 3.6 Método operacional

### 3.6.1 Sistemas lineales con coeficientes constantes

Dado un sistema con incógnitas  $x_1, x_2, \dots, x_n$  y variable independiente  $t$ , si dicho sistema es de ecuaciones lineales de coeficientes constantes, entonces se puede resolver mediante el **operador**  $D$ , que se define de la forma

$$D = \frac{d}{dt}$$

Así, el sistema al aplicar dicho operador se convierte en el siguiente

$$\begin{cases} P_{11}(D)x_1 + P_{12}(D)x_2 + \dots + P_{1n}(D)x_n = f_1(t) \\ P_{21}(D)x_1 + P_{22}(D)x_2 + \dots + P_{2n}(D)x_n = f_2(t) \\ \vdots \\ P_{n1}(D)x_1 + P_{n2}(D)x_2 + \dots + P_{nn}(D)x_n = f_n(t) \end{cases}$$

Se denota el determinante del sistema como

$$\Delta(D) = |P_{ij}(D)|$$

El sistema se puede resolver mediante el método de Cramer, escribiéndose entonces las soluciones como

$$x_i = \frac{F_i(t)}{\Delta(D)}$$

donde

$$F_i(t) = \begin{vmatrix} P_{11}(D) & P_{12}(D) & \dots & P_{1,i-1}(D) & f_1(t) & P_{1,i+1}(D) & \dots & P_{1n}(D) \\ P_{21}(D) & P_{22}(D) & \dots & P_{2,i-1}(D) & f_2(t) & P_{2,i+1}(D) & \dots & P_{2n}(D) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n1}(D) & P_{n2}(D) & \dots & P_{n,i-1}(D) & f_n(t) & P_{n,i+1}(D) & \dots & P_{nn}(D) \end{vmatrix}$$

Dado que son ecuaciones lineales, sus soluciones se pueden expresar como suma de una solución homogénea y una particular:

$$\begin{cases} x_1 = x_{10} + \tilde{x}_1 \\ x_2 = x_{20} + \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ x_n = x_{n0} + \tilde{x}_n \end{cases}$$

**Ejemplo:**

$$\begin{cases} x_1'' - 2x_1 - 3x_2 = e^{2t} \\ x_1 + x_2'' + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Se puede expresar, mediante el operador  $D$ , como

$$\begin{cases} (D^2 - 2)x_1 - 3x_2 = e^{2t} \\ x_1 + (D^2 + 2)x_2 = 0 \end{cases}$$

El determinante de la matriz del sistema es

$$\begin{vmatrix} D^2 - 2 & -3 \\ 1 & D^2 + 2 \end{vmatrix} = D^4 - 1$$

Hallamos primero  $x_2$  y luego despejamos  $x_1 = -(D^2 + 2)x_2$ :

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} D^2 - 2 & e^{2t} \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{D^4 - 1} = -\frac{e^{2t}}{D^4 - 1}$$

Formamos una ecuación diferencial con esta expresión:

$$(D^4 - 1)x_2 = -e^{2t}$$

y su solución general es

$$x_2 = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t - \frac{1}{15} e^{2t}$$

Una vez obtenido este valor, calculamos el de  $x_1$ :

$$x_1 = -\left(3c_1 e^t + 3c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + 3c_4 \sin t - \frac{2}{5} e^{2t}\right)$$

■

Una forma rápida para resolver sistemas lineales de coeficientes constantes es usar el **método de eliminación**, semejante al que se usa con sistemas de ecuaciones lineales algebraicas: se despeja una variable y se sustituye en otra ecuación. Es muy útil con sistemas pequeños.

**Ejemplo:**

$$\begin{cases} x' = 4x - 3y \\ y' = 6x - 7y \end{cases}$$

Despejamos de la segunda ecuación la variable  $x$  y la derivamos, obteniendo

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{6}y' + \frac{7}{6}y \\ x' &= \frac{1}{6}y'' + \frac{7}{6}y' \end{aligned}$$

y sustituyéndola en la primera tenemos

$$\frac{1}{6}y'' + \frac{7}{6}y' = 4\left(\frac{1}{6}y' + \frac{7}{6}y\right) - 3y$$

que se simplifica a

$$y'' + 3y' - 10y = 0$$

Esta es una ecuación lineal de segundo orden que se puede resolver como se vió en el tema anterior y su solución general es

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-5t}$$

Sustituyendo en la expresión de  $x$ :

$$x(t) = \frac{3}{2}c_1 e^{2t} + \frac{1}{3}c_2 e^{-5t}$$

■

### 3.6.2 Método de las combinaciones integrables

Este método se usa en sistemas de ecuaciones no lineales.

Dado un sistema

$$\left\{ \frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \right\}_{i=1:n}$$

una **combinación integrable** es una ecuación diferencial procedente del sistema y que se puede integrar con facilidad. Esto es, para el sistema de antes,

$$\frac{d}{dt} \phi_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \Rightarrow \phi_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 \text{ integral primera}$$

Tendremos que hallar  $n$  integrales primeras que sean linealmente independientes.

El sistema escrito en forma simétrica es

$$\frac{dx_1}{f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)} = dt$$

$$= \frac{\alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2 + \dots + \alpha_n dx_n + \alpha_{n+1} dt}{\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_n f_n + \alpha_{n+1}}$$

con  $\alpha_i$  constantes o variables.

Si escribimos las  $k$  integrales primeras

$$\begin{cases} \phi_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 \\ \phi_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = c_2 \\ \vdots \\ \phi_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = c_k \end{cases}$$

con  $k < n$ . El Jacobiano se escribe como

$$J = \frac{\partial(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k)}{\partial(x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jk})}$$

siendo  $x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jk}$  cualesquiera  $k$  valores de  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Si  $J \neq 0$ , se puede reducir el sistema a  $n - k$  incógnitas. En caso contrario, la solución del sistema serán las  $k$  integrales primeras.

#### **Ejemplo:**

$$\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{y-x}$$

Escribimos el sistema operando las fracciones en cruz:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{z-x}{y-z} = f_1 \\ \frac{dz}{dx} = \frac{y-x}{y-z} = f_2 \end{cases}$$

Para obtener las condiciones integrables:

$$\frac{dx + dy}{y-z + z-x} = \frac{d(x+y)}{y-x} = \frac{dz}{y-x} \rightarrow d(x+y) = dz$$

por lo que la primera condición integrable es

$$\phi_1 : x + y + c_1 = z$$



$$\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x}; \frac{dx}{y-(x+y+c_1)} = \frac{dy}{(x+y+c_1)-x}$$

$$\frac{dx}{-(x+c_1)} = \frac{dy}{y+c_1} \Rightarrow \ln(y+c_1) + \ln(x+c_1) = \ln c_2$$

con lo que queda la segunda condición integrable

$$\phi_2 : (y+c_1)(x+c_1) = c_2$$

Sustituyendo el valor de  $c_1$  en esta última condición podemos obtener la solución del sistema:

$$\begin{cases} x+y+c_1 = z \\ (z-x)(z-y) = c_2 \end{cases}$$

■

**Ejemplo:**

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{y^2}{x} \end{cases}$$

Reescribimos el sistema

$$\frac{dx}{y} = dt = \frac{(dy)x}{y^2}$$

Y hallamos sus condiciones integrables

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \phi : \ln x = \ln y + c_1$$

$$\frac{dx}{x} = c_1 dt \Rightarrow \ln x - \ln c_2 = c_1 t$$

$$\frac{x}{c_2} = e^{c_1 t}$$

■

## 3.7 Resolución matricial

### 3.7.1 Nociones de análisis matricial

Definimos una **matriz funcional** como

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} = (a_{ij}(t))$$

Y se dice que la matriz es **derivable** si  $a_{ij}(t)$  lo son, y se denota la derivada como

$$A'(t) = (a'_{ij}(t))$$

La derivación es lineal. Dadas dos matrices derivables  $A(t) = (a_{ij}(t))$  y  $B(t) = (b_{ij}(t))$  y dos constantes  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,

- a)  $(\alpha A(t) + \beta B(t))' = \alpha A'(t) + \beta B'(t)$   
 b)  $(A(t) \cdot B(t))' = A'(t) \cdot B(t) + A(t) \cdot B'(t)$

Se dice que  $A(t)$  es integrable en  $[a, b]$  si  $a_{ij}(t)$  son integrables en  $[a, b]$ ,  $\forall i, j$ . La integral se define como

$$\int_a^b A(t) dt = \left( \int_a^b a_{ij}(t) dt \right)$$

También es un operador lineal.

La **exponencial** de una matriz de tamaño  $n \times m$  no es tan sencilla como

$$e^{A(t)} = \left( e^{a_{ij}(t)} \right)$$

para empezar porque la igualdad  $e^{(0)} = I$  no se cumple, ya que

$$e^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \neq I$$

En su lugar, se define la exponencial de una matriz funcional como

$$e^{A(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

La **norma** de la matriz  $A(t)$  de tamaño  $n \times m$  es

$$\|A\| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}(t)|$$

y tiene las siguientes propiedades:

- a)  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$   
 b)  $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$   
 c)  $\|\alpha \cdot A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$

**Teorema 3.1.** Dados  $\{c_1, c_2, \dots, c_k, \dots\}$ ,  $c_k = (c_{ij}^k)$  y  $\|c_k\| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |c_{ij}^k|$ .

Si  $\sum_{k=1}^{\infty} \|c_k\|$  converge, entonces también converge  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ .

Llevado a matrices funcionales, deducimos que si  $\sum_{k=1}^{\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\|$  converge, entonces  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = e^{A(t)}$  también converge.

Se puede expresar una ecuación diferencial en forma matricial:

$$\phi'(t) = A \cdot \phi(t)$$

**Teorema 3.2.** Para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $e^{At}$  es solución de  $\phi'(t) = A \cdot \phi(t)$ .

**Teorema 3.3 (Teorema de Existencia y Unicidad).** Dadas dos matrices funcionales  $A$  y  $B$  de tamaño  $n \times n$ , se expresa el problema de valor inicial matricialmente como

$$\begin{cases} F'(t) = A \cdot F(t) \\ F(0) = B \end{cases}$$

que es una forma de expresar un sistema de ecuaciones diferenciales.

Este sistema tiene una única solución para todo  $t$  que es

$$F(t) = e^{At} \cdot F(0) = e^{At} \cdot B$$

**Teorema 3.4.** Dadas dos matrices funcionales  $A$  y  $B$  de tamaño  $n \times n$ , si  $A \cdot B = B \cdot A$  (son permutables), entonces se cumple

- a)  $B \cdot e^{At} = e^{At} \cdot B$   
 b)  $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$

### 3.7.2 Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden y coeficientes constantes

Estos son sistemas del tipo

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + q_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + q_2(t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + q_n(t) \end{cases}$$

Siendo las condiciones iniciales

$$\begin{cases} x_1(a) = b_1 \\ x_2(a) = b_2 \\ \vdots \\ x_n(a) = b_n \end{cases}$$

Se puede expresar el sistema de forma matricial

$$\begin{cases} X'(t) = A \cdot X(t) + Q(t) \\ X(a) = B \end{cases}$$

donde

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad X' = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad Q(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

La resolución de este tipo de sistemas consiste en dos pasos:

1. Resolver la primera ecuación matricial del sistema como ecuación diferencial
2. Calcular el valor de  $e^{At}$  que aparece en la solución que hemos hallado

El primer paso comienza con usar un factor integrante:

$$\mu = e^{-\int A dt} = e^{-At}$$

con lo que la ecuación matricial queda

$$e^{-At} \cdot (X'(t) - A \cdot X(t)) = e^{-At} \cdot Q(t) \Rightarrow \frac{d}{dt} (e^{-At} \cdot X(t)) = e^{-At} \cdot Q(t)$$

Integrando

$$\left[ e^{-At'} \cdot X(t) \right]_{t'=a}^t = \int_a^t e^{-At'} \cdot Q(t') dt'$$

$$e^{-At} \cdot X(t) - e^{-Aa} \cdot X(a) = \int_a^t e^{-At'} \cdot Q(t') dt'$$

( $t'$  no denota una derivada, sino una variable diferente a  $t$ ). La solución por tanto queda

$$X(t) = e^{(t-a)A} \cdot X(a) + e^{At} \cdot \int_0^t e^{-At'} \cdot Q(t') dt'$$

donde

$$X_0 = e^{(t-a)A} \cdot X(a)$$

es la solución de la homogénea asociada.

Ahora se nos presenta el problema de calcular  $e^{At}$  partiendo de nuestro sistema de ecuaciones diferenciales. El valor de la exponencial siempre es

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \cdot A^k$$

y hay varias formas de calcularlo según la forma de  $A$ .

### $A$ es diagonal

En este caso la matriz tiene de componentes en la diagonal principal  $d_1, d_2, \dots, d_n$  y el resto son cero. Por tanto,  $A^k = \text{diag}(d_1^k, d_2^k, \dots, d_n^k)$ . El cálculo de la exponencial se reduce por tanto a

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \text{diag}(d_1^k, d_2^k, \dots, d_n^k) \\ &= \text{diag}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} d_1^k, \sum_{k=0}^{\infty} d_2^k, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} d_n^k\right) \\ &= \begin{pmatrix} e^{d_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{d_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{d_n t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### $A$ es diagonalizable

Si una matriz es diagonalizable, entonces existe una matriz  $P$  (matriz de paso) tal que  $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$  con  $D$  una matriz diagonal. Las componentes de  $D$  son los autovalores de  $A$ . Como podemos escribir  $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ , entonces se puede expresar la exponencial como

$$e^{At} = e^{P \cdot D \cdot P^{-1} t}$$

El desarrollo es

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{t^k}{k!} P \cdot D^k \cdot P^{-1} \right) \\ &= P \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{t^k}{k!} D^k \right) \cdot P^{-1} \\ &= P \cdot e^{Dt} \cdot P^{-1} \end{aligned}$$

con lo que la exponencial queda, siendo  $\lambda_i$  los autovalores de  $A$ ,

$$e^{At} = P \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$$

### Ejemplo:

Resolver el sistema  $X'(t) = A \cdot X(t)$  donde

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solución será de la forma

$$X = e^{(t-a)A} \cdot X(a) = e^{At} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En primer lugar, calculamos los autovalores de  $A$ :

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & 4 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 6 \end{cases}$$

Ahora tenemos que calcular la matriz de paso, partiendo de  $A \cdot P = P \cdot D$ , y construyendo una matriz genérica:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Tras resolver el sistema obtenemos

$$a = 1 \quad b = 4 \quad c = -1 \quad d = 1$$

Con lo que la matriz  $P$  y su inversa son

$$P = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La exponencial queda

$$\begin{aligned} e^{At} &= P \cdot e^{Dt} \cdot P^{-1} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4e^{6t} + e^t & 4e^{6t} - 4e^t \\ e^{6t} - e^t & e^{6t} + 4e^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y la solución es

$$X(t) = e^{At} \cdot X(0) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 8e^{6t} - 3e^t \\ 2e^{6t} + 3e^t \end{pmatrix}$$

■

## Aplicando el Teorema de Cayley-Hamilton

Este teorema dice que toda matriz es raíz de su polinomio característico.

$$f(\lambda) = 0 = |A - \lambda I| = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1\lambda + c_0$$

Entonces

$$f(A) = A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \dots + c_1A + c_0I = 0$$

Y el valor de  $A^n$  se puede expresar como combinación lineal de  $I, A, A^2, \dots, A^{n-1}$ . Entonces, la expresión de la exponencial se puede escribir como

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) A^{k-1}$$

## Método de Putzer

Se puede aplicar a matrices diagonalizables y no diagonalizables. Hemos visto en el método anterior que la potencia enésima de una matriz  $A$  se puede expresar como combinación lineal de las potencias inferiores,  $I, A, A^2, \dots, A^{n-1}$ , por lo que puede expresarse  $e^{At}$  como un polinomio en  $A$

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(t) A^k$$

Putzer desarrolló dos métodos para expresar  $e^{At}$  como un polinomio en  $A$ , pero de forma útil. Con el siguiente teorema se explica el más sencillo de los métodos.

**Teorema 3.5.** *Dados  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , autovalores de una matriz  $A$  de tamaño  $n \times n$  y definiendo una sucesión de polinomios en  $A$*

$$P_0(A) = I$$

$$P_k(A) = \prod_{i=1}^m (A - \lambda_i I) \quad m = 1 : n$$

entonces

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} r_{k+1}(t) P_k(A)$$

donde los coeficientes  $r_i(t)$  se determinan por recurrencia a partir del sistema de ecuaciones diferenciales lineales:

$$r_1'(t) = \lambda_1 r_1(t) \quad r_1(0) = 1$$

$$r_{k+1}'(t) = \lambda_{k+1} r_{k+1}(t) + r_k(t) \quad r_{k+1}(0) = 0, \quad k = 1 : n-1$$

*Demostración.* Si definimos la matriz funcional  $F$ ,

$$F(t) = \sum_{k=0}^n r_k(t) P_{k-1}(A)$$

donde se puede ver que  $F(0) = r_1(0) P_0(A) = I$ . Para demostrar que  $F(t) = e^{At}$ , probaremos que  $F$  satisface la misma ecuación diferencial que  $e^{At}$ ,  $F'(t) = A \cdot F(t)$ . Si derivamos la expresión anterior de  $F(t)$  y usamos las fórmulas de recurrencia vistas en la demostración, obtenemos

$$F'(t) = \sum_{k=0}^{n-1} r_{k+1}'(t) P_k(A) = \sum_{k=0}^{n-1} (r_k(t) + \lambda_{k+1} r_{k+1}(t)) P_k(A)$$

donde se define  $r_0(t) = 0$ .

$$F'(t) = \sum_{k=0}^{n-2} r_{k+1}(t) P_{k+1}(A) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k+1} r_{k+1}(t) P_k(A)$$

Si restamos  $\lambda_n F(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_n r_{k+1}(t) P_k(A)$

$$F'(t) - \lambda_n F(t) = \sum_{k=0}^{n-2} r_{k+1}(t) (P_{k+1}(A) + (\lambda_{k+1} - \lambda_n) P_k(A))$$

donde

$$P_{k+1}(A) = (A - \lambda_{k+1} I) P_k(A)$$

por tanto

$$\begin{aligned} P_{k+1}(A) + (\lambda_{k+1} - \lambda_n) P_k(A) &= (A - \lambda_{k+1} I) P_k(A) + (\lambda_{k+1} - \lambda_n) P_k(A) \\ &= (A - \lambda_n I) P_k(A) \end{aligned}$$

con lo que obtenemos

$$\begin{aligned} F'(t) - \lambda_n F(t) &= (A - \lambda_n I) \sum_{k=0}^{n-2} r_{k+1}(t) P_k(A) \\ &= (A - \lambda_n I) (A - \lambda_n I) (F(t) - r_n(t) P_{n-1}(A)) \\ &= (A - \lambda_n I) F(t) - r_n(t) P_n(A) \end{aligned}$$

Por el Teorema de Cayley-Hamilton,  $P_n(A) = 0$ , por tanto

$$F'(t) - \lambda_n F(t) = (A - \lambda_n I) F(t) = AF(t) - \lambda F(t)$$

Resultando finalmente

$$F'(t) = A \cdot F(t)$$

por el teorema de Existencia y Unicidad 3.3, se demuestra que  $F(t) = e^{At}$  ya que  $F(0) = I$ . □

### **Ejemplo:**

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

calcular  $e^{At}$ .

Primero calculamos los autovalores de la matriz,

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 2 & -5 & 4 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 (4 - \lambda) + 2 - 5\lambda \\ &= \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = 2$$

Para que una matriz sea diagonalizable, el rango de  $A - I$  debe ser igual al orden menos el orden de multiplicidad, y mientras que el rango para  $\lambda = 1$  es 2, el orden (3) menos la multiplicidad (2) es 1, por lo que la matriz no es diagonalizable y tenemos que aplicar el método de Putzer.

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{k=1}^n r_k(t) P_{k-1}(A) \\ &= r_1(t) P_0(A) + r_2(t) P_1(A) + r_3(t) P_2(A) \end{aligned}$$

siendo los polinomios

$$P_0(A) = I$$

$$P_1(A) = A - I$$

$$P_2(A) = (A - I)^2$$

y los coeficientes:  $r_1(t)$

$$\left. \begin{array}{l} r_1'(t) = \lambda_1 r_1(t) \\ r_1(0) = 1 \end{array} \right\} r_1(t) = e^t$$

$r_2(t)$

$$\left. \begin{array}{l} r_2'(t) = \lambda_2 r_2(t) + r_1(t) \\ r_2(0) = 0 \end{array} \right\} r_2(t) = t e^t$$

$r_3(t)$

$$\left. \begin{array}{l} r_3'(t) = \lambda_3 r_3(t) + r_2(t) \\ r_3(0) = 0 \end{array} \right\} r_3(t) = e^{2t} - (t+1) e^t$$

por lo que la exponencial es

$$e^{At} = e^t \left( I + t(A - I) - (t+1)(A - I)^2 \right) + (A - I)^2 e^{2t}$$

■