

Control # 1 MA26A-02 Primavera 2004

Prof: Denis Legrand - P.Aux: Francisco Ortega Culaciati

1 de Septiembre de 2004

- P1.- a) Vamos a ver un modelo simple para el estudio del crecimiento de una población. Vamos a suponer que la tasa promedio de nacimientos por individuo es una constante positiva, y que la tasa promedio de defunciones por individuo es proporcional a la población.

Si notamos $x(t)$ como la población al tiempo t , la suposición anterior se puede traducir de la manera siguiente:

$$(E1) \quad \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = b - a \cdot x$$

donde a y b son constantes positivas. Esta ecuación se conoce como ecuación logística y el crecimiento de la población determinado por ella es llamado crecimiento logístico.

1. ¿ De que tipo (forma, nombre) es la ecuación (E1)?
 2. Resolver la ecuación diferencial ordinaria (E1), con la condición inicial de que en $t = 0$, la población es $x(0) = x_0 > 0$.
 3. ¿ Cual es el límite de la solución cuando $t \rightarrow \infty$?
 4. ¿ Cual es la condición sobre a y b para que la población crezca?
 5. ¿ Cual es la condición sobre a y b para que la población disminuya?
- b) El 01 de Septiembre de 1923, a las 11:58hrs, ocurrió en Tokio un terremoto de magnitud cercana a 8. Después de este, los precios de las mercaderías cambiaron hasta llegar a una estabilización. Vamos a ver un modelo económico simple para traducir la evolución de los precios después del terremoto. Si $P(t)$ es el precio, $S(t)$ la oferta y $D(t)$ la demanda de un producto al tiempo t , y si suponemos que la tasa de cambio en el precio es proporcional a la diferencia entre la demanda y la oferta, tenemos:

$$(E2) \quad \frac{dP}{dt} = k(D - S)$$

con k una constante positiva.

1. ¿ Que significa sobre el precio de tomar $k > 0$?
2. Vamos a suponer un modelo de mercado siguiente:

$$D(t) = c - d \cdot P(t) \quad S(t) = a + b \cdot P(t)$$

donde a, b, c y d son constantes positivas.

- 2.1 ¿ Que significan estas ecuaciones sobre la demanda cuando el precio aumenta y que significa para la oferta cuando el precio aumenta? Es una suposición razonable?
- 2.2 Escribir la ecuación (E2) con estas condiciones.
- 2.3 ¿ De que tipo es esta ecuación?
3. ¿ Cual es la condición sobre el precio de modo que la demanda sea siempre positiva?
4. ¿ Resolver la ecuación con la condición inicial: $t = 0, P = P_0$.
5. ¿ Mostrar que el precio se estabiliza en un valor que calcularán para tiempos muy grandes.

P2.- Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

$$3(3x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0 \quad (1)$$

$$(2x^3 - xy^2 - 2y + 3)dx - (x^2y + 2x)dy = 0 \quad (2)$$

$$y' = 1 + 3y \tan(x) \quad (3)$$

$$3x^2ydx + (y^4 - x^3)dy = 0 \quad (4)$$

$$y'' + y' \cos(x) = \sin(2x) \quad (5)$$