

**Control # 1 MA26A-01 Primavera 2003**  
**Prof: Denis Legrand. - P.Aux: Francisco Ortega Culaciati**  
**10 de Septiembre de 2003**

P1.- 1.1 La segunda ley de Newton se escribe de la forma:

$$\Sigma \vec{F} = \frac{d}{dt} (m \vec{V})$$

- a) Suponiendo que la masa ' $m$ ' no varía con el tiempo (ie,  $m = \text{constante}$ ). ¿Cómo se escribe la segunda ley de Newton?
- b) Ahora si la masa ' $m$ ' varía con el tiempo (ie,  $m = m(t) \neq \text{constante}$ ). ¿Cómo se escribe la segunda ley de Newton?

**Hint:** No olvidar indicar las 'flechas' en los vectores.

**1.2** El volcán Lascar entró en erupción varias veces durante el siglo XX. Algunas bombas volcánicas fueron expulsadas del cráter durante las erupciones. La idea de este problema es modelar la trayectoria de una bomba volcánica en forma simplificada, asumiendo que su movimiento se restringe a un eje vertical, y que siempre esta bajo la acción de la fuerza de gravedad.

- a) Vamos a suponer como primera aproximación que una bomba es expulsada desde el crater verticalmente hacia arriba, y que la masa " $m$ " de la bomba permanece constante, vamos a ignorar también la resistencia del aire. Si la bomba fue expulsada hacia arriba al tiempo  $t_0 = 0$  en la cumbre del volcán a una altura  $Z_0$ , con una velocidad  $V_0$  (tomar el eje  $Z$  positivo hacia arriba), se pide:
  - i) Encontrar una expresión para la velocidad de la bomba en función del tiempo.
  - ii) Encontrar una expresión para la posición de la bomba en función del tiempo.
  - iii) Encontrar una expresión para la altura máxima que alcanza la bomba e indicar cuales son los parámetros de los que depende.
- b) Las observaciones muestran que la altura máxima de la bomba es menor que lo que se predice en a), luego, para considerar las observaciones, se tomará en cuenta la resistencia del aire. Supondremos que el aire se va a oponer al movimiento de la bomba con una fuerza  $F_R$  proporcional al vector velocidad  $\vec{V}$ , con un coeficiente de resistencia  $k > 0$  (Notar que  $k > 0$ , luego deben colocar los signos adecuados en la modelación del problema). Se pide:
  - i) Hacer un dibujo con las fuerzas que actúan sobre la bomba (DCL), expresar la fuerza  $\vec{F}_R$  en función de  $k$  y  $\vec{V}$  en forma vectorial, escribir la segunda ley de Newton para el problema y proyectarla en el eje  $Z$ .
  - ii) ¿De que tipo es esta ecuación diferencial?
  - iii) Resolver la ecuación con las mismas condiciones iniciales que en la parte a), ie, encontrar expresiones para la velocidad y la posición de la bomba en función del tiempo.
  - iv) Encuentre una expresión para la altura máxima que alcanza la bomba con esta nueva aproximación.
- c) Despreciemos nuevamente la resistencia del aire, pero incorporemos el hecho de que la bomba pierde masa a lo largo de su trayectoria. Si la pérdida de masa de la bomba se rige según la ley  $dm = -\lambda dt$ , con  $\lambda > 0$ , expresar la masa de la bomba en función del tiempo considerando que  $m(t_0 = 0) = m_0$ , encuentre además la velocidad y la posición de la bomba en función del tiempo, para ello utilice las mismas condiciones iniciales que en a)

P2.- Para las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) Resolver  $2y' + 3xy = x$  con la condición inicial:  $y(0) = 0$

b) Resolver  $xy' = 2y + x$

c) Resolver

$$y' = \frac{-6x + 4y + 4}{-x + y + 2}$$

d) Resolver  $(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$  utilizando **dos métodos diferentes**.

e) Muestre que  $\mu(x, y) = xy^2$  es factor integrante de la siguiente ecuación diferencial y resuélvala:

$$(2y - 6x)dx + \left(3x - 4\frac{x^2}{y}\right)dy = 0$$

f) Resolver  $y' + y\cos(x) = 2\cos(x)$

g) Para la ecuación de Lagrange:

$$y = x + y' - 3(y')^2 \quad (1)$$

i) Mostrar que (1) se puede transformar en una EDO a variables separables y resuelva esta última ecuación.

ii) Expresar la solución de (1) de manera implícita, como curvas paramétricas en función del parámetro  $p = y'$ .

Tiempo: 3:00 hrs.