Universidad de Chile
Depto. de Ingeniería Matemática

Pauta Control #3

MA22A – Cálculo en Varias Variables

Prof: Marcelo Leseigneur P. **Fecha:**
Auxiliares: 9 de Noviembre de 2006
Renzo Lüttges Cintolesi
José Miguel Vera

Pregunta 1:

a) Sea:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}\quad \text{definida sobre}\quad R=[0,1]\times[0,1]$$

Compruebe que: $\iint_R f(x,y)\,dy\,dx=\dfrac{\pi}{4}$ y $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy=-\dfrac{\pi}{4}$.

Solución:
Calculamos las integrales iteradas:

$$\int_0^1 f(x,y)\,dy=\frac{1}{x^2}\int_0^1\frac{1-(y/x)^2}{(1+(y/x)^2)^2}\,dy\underset{y/x=\tan(u)}{=}\frac{1}{x}\int_0^{\arctan(1/x)}\frac{1-\tan^2(u)}{(1+\tan^2(u))^2}sec^2(u)\,du$$

$$=\frac{1}{x}\int_0^{\arctan(1/x)}(\cos^2 u-sen^2 u)\,du=\frac{1}{x}\int_0^{\arctan(1/x)}\cos 2u\,du=\frac{1}{1+x^2}$$

Por simetría obtenemos:

$$\int_0^1 f(x,y)\,dx=\int_0^1 -f(y,x)\,dx=-\frac{1}{1+y^2}\quad .$$

Por tanto:

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right)dx=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\arctan(1)-\arctan(0)=\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right)dy=-\int_0^1\frac{dy}{1+y^2}=\arctan(0)-\arctan(1)=-\frac{\pi}{4}\quad .$$

Las integrales iteradas son distintas. Esto es debido a que no se cumplen a cabalidad las hipótesis del teorema de Fubini, pues f no es acotada en la región.

b) Sea:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2} & si\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si\ (x,y)=(0,0) \end{cases} \quad \text{definida sobre} \quad R=[-1,1]\times[-1,1]$$

Demuestre que las integrales iteradas coinciden y valen cero, sin embargo f no es integrable en R. ($\iint_R |f(x,y)|dx\,dy$ no es finita) ¿Contradice esto el teorema de Fubini? Explique.

Solución:

Veamos las integrales iteradas:

$$\int_0^1 f(x,y)\,dx \underset{x/y=\tan(u)}{=} \frac{1}{y^2}\int_{-\arctan(1/y)}^{\arctan(1/y)} \frac{\tan(u)sec^2(u)}{sec^4(u)}du = \frac{1}{2y^2}\int_{-\arctan(1/y)}^{\arctan(1/y)} sen(2u)\,du \quad .$$

La cual, por tratarse de una integral de función impar sobre un intervalo simétrico, vale 0.

Por simetría de la función deducimos que

$$\int_0^1 f(x,y)\,dy=0 \quad . \text{ Con lo cual:}$$

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right)dy=\int_0^1 0\cdot dy=0 \quad \text{y} \quad \int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right)dx=\int_0^1 0\cdot dx=0 \quad .$$

Luego vemos que a pesar de que f no es acotada en la región, las integrales iteradas coinciden. Esto no contradice el teorema de Fubini puesto que si no se cumplen las hipótesis no se nos asegura nada sobre la función.