Universidad de Chile
Depto. de Ingeniería Matemática

Pauta - Control #3

MA22A – Cálculo en Varias Variables

Prof: Marcelo Leseigneur P.
Auxiliares:
Renzo Lüttges Cintolesi
José Miguel Vera

Fecha:
9 de Noviembre de 2006

Pregunta 2:

a)

i) Considere $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida como: $f(x) = x^T P x + 2Q^T x + R$
Donde P es una matriz de nxn, Q es un vector de nx1 y R es un número real. Dé las condiciones necesarias para que f sea convexa. ¿cuándo f es estrictamente convexa?

Solución:
De la expresión calculada en el enunciado, obtenemos ∇f derivando:
$\nabla f = (P+P^T)x + 2Q^T$. Donde derivando nuevamente calculamos $H_f = (P+P^T)$.
Luego para que f sea convexa la matriz $P+P^T$ debe ser semi definida positiva. Asimismo, para que f sea estrictamente convexa, la matriz mencionada debe ser definida positiva.

ii) Probar que la función $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(e^{x_1} + e^{x_2} + \cdots + e^{x_n})$ es convexa en $\mathbb{R}^n$. Finalmente muestre que:
$max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \leqslant f(x) \leqslant max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} + \ln(n) \quad \forall n$. Interprete.

Solución:
Al calcular el gradiente obtenemos: $\nabla f = \left(\sum_{k=1}^{n} e^{x_k}\right)^{-1} \cdot (x_1, x_2, \ldots., x_n)^T$. luego, para el Hessiano

tendremos la expresión: $H_f(x)_{ij} = \begin{cases} -\left(\sum_{k=1}^{n} e^{x_k}\right)^{-2} \cdot e^{x_i + x_j} & i \neq j \\ \left(\sum_{k=1}^{n} e^{x_k}\right)^{-2} \cdot \left[e^{2x_j} + e^{x_j}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{x_k}\right)\right] & i = j \end{cases}$. Ahora, para que f

sea convexa, se debe tener:

$x^T H_f x = \left[\left(\sum_{k=1}^{n} e^{x_k} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} e^{x_k}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} e^{x_k} x_k\right)\right] \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} e^{x_k}\right)^{-2} \geqslant 0$ lo cual se tiene pues el numerador es positivo gracias a la desigualdad de Cauchy – Schwartz.

La primera desigualdad pedida la obtenemos al tomar logaritmo en la siguiente expresión:

$e^{x_{MAX}} \leqslant \sum_{i=1}^{n} e^{x_i}$ Donde $x_{MAX} = \max_{i=1..n}\{x_1, \dots, x_n\}$. La desigualdad se tiene porque $e^x > 0$.

Para obtener la segunda desigualdad, usamos que $\ln(x)$ es creciente para acotar el argumento como sigue:

$$f(x) = \ln\left(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}\right) \leqslant \ln\left(\sum_{i=1}^{n} e^{x_{MAX}}\right) = \ln(n \cdot e^{x_{MAX}}) = \ln(e^{x_{MAX}}) + \ln(n) = x_{MAX} + \ln(n)$$

b) Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} (P)\ &Min\ x_1^2 + \cdots + x_n^2 \\ s.a.\ &x_1 x_2 x_3 \cdots x_n = 1 \\ &x_i > 0 \end{aligned}$$

i) Resuelva (P) usando multiplicadores de Lagrange y justifique sus resultados

Solución:

Queremos minimizar $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Calculamos el lagrangeano:

$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \lambda\left(\prod_{i=1}^{n} x_i - 1\right)$ .Ahora calculamos $\nabla L = 0$, de donde obtenemos:

$\frac{\partial L}{\partial x_k} = 2x_k - \lambda \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{x_k} = 0$ para cada x_k y además $\prod_{i=1}^{n} x_i = 1$ en la componente λ .

Reemplazando el valor de la pitatoria en la ecuación para x_k llegamos a:

$2x_k^2 = \lambda \Rightarrow x_k = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}$. Luego en el óptimo los x_k . Para calcular λ hacemos:

$\prod_{i=1}^{n} x_i = 1 \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{\lambda}{2}} = 1 \Rightarrow \lambda^{\frac{1}{2n}} = 2^{\frac{1}{2n}} \Rightarrow \lambda = 2$. Luego en el óptimo los x_k son todos iguales y quedan definidos de forma única:

$x_k^{optimo} = 1 \quad \forall k$. El valor de la función objetivo en este punto es $f(x_1, \dots, x_n)_{\text{optimo}} = n$

ii) Pruebe que si $a_1, a_2, \ldots a_n \geqslant 0$ entonces: $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$

Solución:

Si alguno de los a_i es nulo, la desigualdad es trivial. Veamos el otro caso:

Usando los resultados de la parte (i), tomar:

$x_i = \sqrt{\frac{a_i}{\left(\prod_{j=1}^{n} a_j\right)^{\frac{1}{n}}}}$ Notar que para cualquier conjunto de valores $a_i > 0$ cumple que $\prod_{i=1}^{n} x_i = 1$

Además de la parte anterior:

$f(x_1, \ldots, x_n)_{\text{optimo}} \leqslant f(x_1, \ldots, x_n)$ para cualquier conjunto de valores x_i que cumpla las restricciones. Reemplazando:

$$n \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad \Rightarrow \quad n \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\left(\prod_{j=1}^{n} a_j\right)^{\frac{1}{n}}} \quad \Rightarrow \quad \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

iii) Interprete sus resulatdos.

Solución:

La interpretación de este resultado es que la media aritmética es siempre mayor o igual a la media geométrica de un conjunto cualquiera de valores no negativos.