

Control #3

MA22A – Cálculo en Varias Variables

Prof: Marcelo Leseigneur P.

Fecha:

Auxiliares:

9 de Noviembre de 2006

Renzo Lüttges Cintolessi

José Miguel Vera

Pregunta 1:

a) Sea:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{definida sobre } R = [0, 1] \times [0, 1]$$

Compruebe que: $\iint_R f(x, y) dy dx = \frac{\pi}{4}$ y $\iint_R f(x, y) dx dy = -\frac{\pi}{4}$.

b) Sea:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{definida sobre } R = [-1, 1] \times [-1, 1]$$

Demuestre que las integrales iteradas coinciden y valen cero, sin embargo f no es integrable en R . ($\iint_R |f(x, y)| dx dy$ no es finita) ¿Contradice esto el teorema de Fubini? Explique.

Pregunta 2:

a)

i) Considere $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = x^T P x + 2 Q^T x + R$$

Donde P es una matriz de $n \times n$, Q es un vector de $n \times 1$ y R es un número real. Dé las condiciones necesarias para que f sea convexa. ¿cuándo f es estrictamente convexa?

ii) Probar que la función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(e^{x_1} + e^{x_2} + \dots + e^{x_n})$ es convexa en \mathbb{R}^n . Finalmente muestre que:

$$\max\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \leq f(x) \leq \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\} + \ln(n) \quad \forall n. \text{ Interprete.}$$

b) Considere el siguiente problema de optimización:

$$(P) \text{ Min } x_1^2 + \cdots + x_n^2 \\ \text{s.a. } x_1 x_2 x_3 \cdots x_n = 1 \\ x_i > 0$$

i) Resuelva (P) usando multiplicadores de Lagrange y justifique sus resultados

ii) Pruebe que si $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ entonces: $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$

iii) Interprete sus resultados.

Pregunta 3:

a)

i) Supongamos que la igualdad $F(x, y, z) = 0$ determina implícitamente funciones diferenciables $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$, $z = z(x, y)$. Probar que $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1$.

ii) Calcular las derivadas parciales de segundo orden de la función $z = z(x, y)$ definida implícitamente por $f(x+z, y) = 0$ donde se supone que f es una función de dos variables de clase C^2 .

b)

i) Calcular los extremos de la función $f(x, y) = x^2 + y^2 + x + y$ en el conjunto $K = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

ii) Calcular todos los puntos de la superficie $z = e^{x+y} + \sin(x-y)$ cuyo plano tangente es paralelo a $z = x + y$.

Tiempo: 3 Horas.