

## Tarea

### MA22A – Cálculo en Varias Variables

**Prof:** Marcelo Leseigneur

**Auxiliares:**

Renzo Lüttges

José Miguel Vera

**Fecha Emisión:**

Viernes 13 Octubre de 2006

**Fecha Entrega:**

Martes 17 Octubre de 2006

#### **Pregunta 1:**

Sea  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función clase  $C^2$ . Se define  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  por:

$$f(x, y) = F\left(\frac{y}{x}\right). \text{ Se pide:}$$

- i) Calcular  $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$  (el laplaciano de  $f$ )
- ii) Determinar las funciones  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que:  
 $\nabla^2 f = 0$ ,  $F(0) = 0$ ,  $F(1) = 1$

#### **Pregunta 2:**

Sean  $\Phi, \Psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones arbitrarias de clase  $C^2$ . Se define:

$$z(x, y) = x\Phi\left(\frac{y}{x}\right) + \Psi\left(\frac{y}{x}\right). \text{ Calcular el valor de la siguiente expresión:}$$

$$E = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

#### **Pregunta 3:**

Sean  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una aplicación dos veces diferenciable y  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una aplicación lineal.  
 $y \rightarrow f(y)$   $x \rightarrow T(x) = Tx$

Se define  $F(x) = f \circ T(x)$ . Demuestre que:

- i)  $\frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_j} = \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 f(Tx)}{\partial y_l \partial y_i} T_{lk} T_{ij}$  Donde  $T_{ab}$  es el elemento  $a, b$  de la matriz representante de la transformación  $T$  respecto a la base canónica

- ii) Si  $T$  es transformación ortonormal, es decir  $T^{-1} = T^t$ , entonces:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_j^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f(Tx)}{\partial y_i^2}$$

iii) Si  $T$  es una transformación de Lorentz, es decir,  $T^{-1} = S T' S$  donde

$$S = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ . & 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & 0 & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{n \text{ columnas}} \quad n \text{ filas}$$

Entonces:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_k \partial x_j} S_{kj} = \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 f(Tx)}{\partial y_i \partial y_l} S_{il}$$

Puede serle útil (no lo demuestre):

- a) Si  $T$  es una transformación de Lorentz, entonces su inversa también lo es.
- b)  $S^2 = I$  (matriz identidad)

#### Pregunta 4:

Sean  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones clase  $C^2$ . Se define  $F(x) = f(x, g(x))$ .

- i) Calcule  $F'(x)$  y  $F''(x)$ .
- ii) Si  $f$  verifica la ecuación de Laplace:  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ , es convexa y si  $g$  es un polinomio mónico de primer grado, calcule  $F''(x)$  con la fórmula obtenida en (i)

#### Pregunta 5:

a) La altura de un cilindro circular recto aumenta a una tasa de 2 cm/s y su radio disminuye a una tasa de 3 cm/s. ¿Con qué tasa varía su volumen si el radio es 10 cm y la altura es de 15 cm?

b) Sea  $f(x, y, z)$  una función escalar tal que  $\nabla f(0, 0, 1) = (3, -1, 5)$ . Encuentre la derivada de la función  $g(t) = f(\sin(t), -3t, e^t)$  en  $t=0$ .

c) Encuentre los puntos del Elipsoide  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$  donde el plano tangente es paralelo al plano  $\pi: 3x - y + 3z = 1$ .