

MA22A – Cálculo en Varias Variables – Tarea #2

Profesor: Marcelo Leseigneur
 Ayudantes: Renzo Lüttges, José Miguel Vera

Pregunta 1:

Analice la continuidad de f , así como la existencia y continuidad de sus derivadas parciales de:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 \sin(y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Pregunta 2:

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Muestre que f es diferenciable en $x=0$, pero f' no es continua en $x=0$. Calcular $f'(0)$.

Pregunta 3:

a) Considere $z = x^3 - 3x^2y - 2y^3$. Pruebe que $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 3z$

b) Considere $z = \frac{x-y}{x+y}$. Pruebe que $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

c) Considere $z = \frac{xy}{x+y}$. Pruebe que $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$

Pregunta 4:

Considere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Se define $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por:

$$F(x, y) = (f(u(x, y)), v(x, y))$$

donde $u(x, y) = x + y$ y $v(x, y) = \sin(x - y)$.

a) Demuestre que:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 = 2\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + 2\cos^2(x - y)\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2$$

b) Verifique lo anterior para $f(u, v) = uv$

Pregunta 5:

Sean $f, g: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables en $x_0 \in \text{int}(D)$.

Sea $\tilde{D} = \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$ con $x_0 \in \tilde{D}$.

Se define la función $h: \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

a) Demuestre formal y explícitamente que h es diferenciable en x_0 (¿tiene sentido estudiar la diferenciabilidad de h en x_0 ?)

b) Demuestre que:

$$\nabla h(x_0) = \frac{g(x_0) \nabla f(x_0) - f(x_0) \nabla g(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

c) Considere las funciones $f(x, y) = x^3 \sqrt{xy}$ y $g(x, y) = \sqrt{x^3 - y}$. Calcular el gradiente de $h = f/g$ en forma directa y luego utilizando la fórmula obtenida en b)

Pregunta 6:

i) Sea $A \in M_{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Se define $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \|Ax - b\|_2^2$$

Muestre que f es diferenciable y calcule $\nabla f(x)$.

ii) Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad \text{con } p \geq 1$$

a) Analizar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

b) ¿Para qué direcciones f admite derivada direccional en $(0,0)$? Comente.

c) ¿Qué sucede en a) y b) si $f(x) = \max_{i=1, \dots, n} \{|x_i|\}$?

Pregunta 7:

Los espirales de Maclaurin corresponden a una familia de curvas en el plano que al ser descritas en coordenadas polares las variables ρ y θ satisfacen la relación:

$$\rho(\theta) = a (\sin(n\theta))^{1/n}$$

donde $a > 0$ y $n \in \mathbb{R} - \{0\}$ corresponde al orden de la espiral. Pruebe que la curvatura de una espiral de Maclaurin de orden n es:

$$K(\theta) = \frac{n+1}{a} (\sin(n\theta))^{n-1}$$

Pregunta 8:

Para cada una de las siguientes funciones:

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$f(x, y) = e^{(x^2 - y)}$$

$$f(x, y) = \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}$$

Se pide:

- Dibujar la curva de nivel correspondiente a $f(x, y) = 1$
- Encontrar una parametrización $\sigma(t)$ de esta curva.
- Calcular ∇f , evaluarlo en 3 puntos de la curva y dibujarlo junto a ésta.
- Para uno de estos puntos, digamos, x_0 , calcular $f(x_0)$ y $f(x_0 + \nabla f(x_0))$.
- Concluir sobre las curvas de nivel, el gradiente y las direcciones de crecimiento de f

Problema 9:

- Sean $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables.

Se define $z(u, v) = e^{f^2(u, v)g(u, v)}$

- Determine las derivadas parciales de z ¿Es z diferenciable?
- Si $f(u, v) = \sqrt{uv}$ y $g(u, v) = 1/v$. Compruebe la fórmula obtenida en la parte i)

- Sean f y g dos funciones reales de variable real, derivables en \mathbb{R} . Se define la función:

$$z(x, y) = x^2 y f(u) + x y^2 g(v) \text{ con } u = \frac{x}{y} \text{ y } v = \frac{y}{x}$$

Se pide calcular:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$$

- Sean $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables. Se define la función:

$$f(x, y) = x^2 g\left(\frac{x}{y}\right) + xy h\left(\frac{x}{x+y}, \frac{x^2}{y^2}\right)$$

Demuestre que: $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2f$