

MA22A - Cálculo en Varias Variables
Semestre Primavera 2006

Profesor:
Marcelo Leseigneur P

Auxiliares:
Renzo Lüttges C.
José Miguel Vera R.

Tarea # 1 - Topología

Problema 1: Sea (X, ρ) un espacio métrico. Pruebe que las siguientes funciones d son métricas en X .

- a) $\forall x, y \in X, d(x, y) = 2\rho(x, y)$
- b) $\forall x, y \in X, d(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\}$
- c) $\forall x, y \in X, d(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$

Problema 2: Sea C el conjunto de todas las funciones reales continuas en $[0, 1]$. Para cada $f, g \in C$ se definen:

$$\rho(f, g) = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)|$$

$$\sigma(f, g) = \left(\int_0^1 |f(t) - g(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

$$\Gamma(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt$$

a) Suponga que $f \neq g$. Luego $\exists t_0$ tal que $f(t_0) \neq g(t_0)$. Pruebe que existe un intervalo $I \subseteq [0, 1]$ tal que $|f(t) - g(t)| \geq \frac{1}{2} |f(t_0) - g(t_0)|$ para todo $t \in I$. Deduzca que $\sigma(f, g) > 0$ y $\Gamma(f, g) > 0$.

b) Pruebe que ρ, σ , y Γ son métricas en C .

Indicación: Puede serle útil emplear la desigualdad de Schwartz para integrales:

$$\left(\int_0^1 \phi(t) \psi(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_0^1 \phi^2(t) dt \right) \cdot \left(\int_0^1 \psi^2(t) dt \right)$$

c) Pruebe que para todo $f, g \in C$ se tiene:

$$\rho(f, g) \geq \sigma(f, g) \geq \Gamma(f, g)$$

d) Para todo $n \in \mathbb{N}$, sea:

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 - nt & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} < t \leq 1 \end{cases}$$

Y sea $f(t) = 0$ para todo $t \in [0, 1]$.

- i. Pruebe que $f_n \rightarrow f$ si $n \rightarrow \infty$ en (C, ρ)
- ii. ¿Converge f_n a f en (C, Γ) ? Justifique.
- iii. Pruebe que f_n no converge a f en (C, ρ)

Problema 3: Probar que en todo espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ se tiene que:

$$\left\| \frac{1}{2}(x + y) \right\|^2 \leq \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2$$

Problema 4: Estudiar si las sucesiones de funciones definidas por:

$$X_n(t) = t^n - t^{n+1}$$

$$Y_n(t) = t^n - t^{2n}$$

Convergen en $C[0, 1]$ donde la norma viene dada por $\|x\| = \sup_{t \in [0, 1]} |x(t)|$

Problema 5: Probar que para dos vectores x e y cualesquiera se verifica:

$$\|x\| \leq \text{Máx}\{\|x + y\|, \|x - y\|\}$$

Problema 6: Sea la sucesión de funciones $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n \\ 1 & \text{si } 1/n < x \leq 1 \end{cases}$$

y sea $f(x) = 1 \quad \forall x \in [0, 1]$. Se pide responder y fundamentar lo siguiente:

- i) La sucesión converge puntualmente a f ?
- ii) La sucesión converge uniformemente a f ?
- iii) La sucesión converge en L^2 a f ?

Indic. La convergencia en L^2 es con la métrica $d(f, g) = \left(\int_0^1 |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{1/2}$

Problema 7: Considere el conjunto $C^1[0, 1]$ de todas las funciones reales definidas en $[0, 1]$ con primera derivada continua en $[0, 1]$. Muestre que :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))dt$$

define un producto interno en $C^1[0, 1]$.

Problema 8: Suponga que V es un espacio dotado de un producto interno, y que u, v, x, y pertenecen a V .

a) Muestre que $\langle u + v, x + y \rangle - \langle u - v, x - y \rangle = 2\langle u, y \rangle + 2\langle v, x \rangle$

b) Deduzca que $4\langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2$

Problema 9: Considere en \mathbb{R}^n la siguiente norma:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Muestre que $\|\cdot\|_p$ proviene de un producto interno si y solo si $p=2$.

Indicación: Considere $x=(1,1,0,0,0,\dots)$ e $y=(1,-1,0,0,0,\dots)$

Problema 10: Sea (E, d) un espacio métrico donde además E es un espacio vectorial real. Muestre que d proviene de una norma si y sólo si:

a) $d(x + z, y + z) = d(x, y) \quad \forall x, y, z \in E$

b) $d(kx, ky) = |k| d(x, y) \quad \forall x, y \in E \quad \forall k \in \mathbb{R}$

Indic. Bajo dichas condiciones la norma sería $\|x\| = d(x, 0)$.

Problema 11: Sea $E = [0, \infty[$. Se define una aplicación de $E \times E$ en \mathbb{R} por:

$$d(x, y) = \left| \frac{x}{x+1} - \frac{y}{y+1} \right|$$

i) Muestre que d es una métrica en E .

ii) Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión en E definida por $x_n = n$.

¿Es $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy en $(E, |\cdot|)$?

¿Es $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy en (E, d) ?

Pregunta 12: Sean A y B dos conjuntos no vacíos de puntos de \mathbb{R}^n . Se llama $A+B$ al siguiente conjunto:

$$A+B = \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$$

Pruebe que si A es abierto y B es cualquier conjunto, entonces $A+B$ es abierto.

Pregunta 13: Si A es un conjunto abierto de \mathbb{R}^2 , sea $C = A \cap (Q \times Q)$. Hallar $\text{Int}(C)$, $\text{Adh}(C)$ y $\text{Fr}(C)$.

Pregunta 14: Sean A y B dos conjuntos de puntos en \mathbb{R}^n . Hallar la relación de inclusión que liga a $\text{Fr}(A \cup B)$ con $\text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(B)$. Estudiar lo anterior si $\text{Adh}(A) \cap \text{Adh}(B) = \emptyset$.