

Topología

Las matemáticas de la distorsión



¿Qué es la Topología?

- Poincaré : Analysis Situs (posición)



Importa más la posición relativa entre los puntos
Que la curva analítica que los une.

No nos importan las cantidades ni el cálculo de ellas

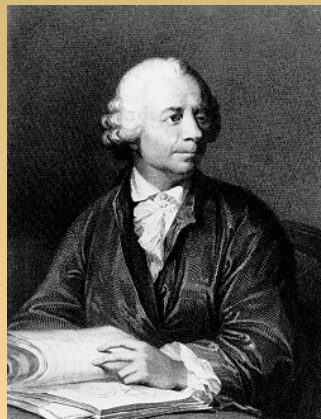
Eso la diferencia de la geometría Euclidiana

Métricas, Normas y Conjuntos de Puntos son
Algunas herramientas que nos permiten trabajar
con ella

Algo de Historia



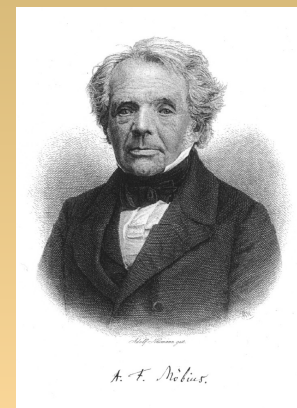
G. Leibnitz



L. Euler



Lhuillier



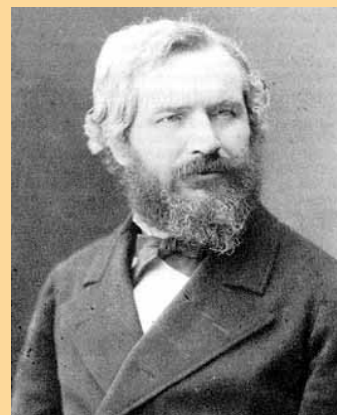
Möbius



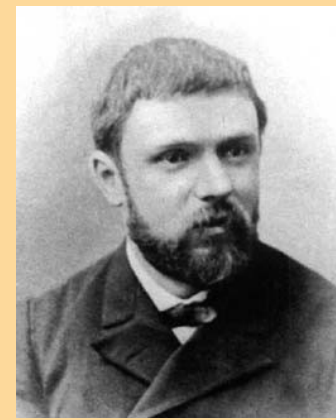
J. Listing



B. Riemann



C. Jordan

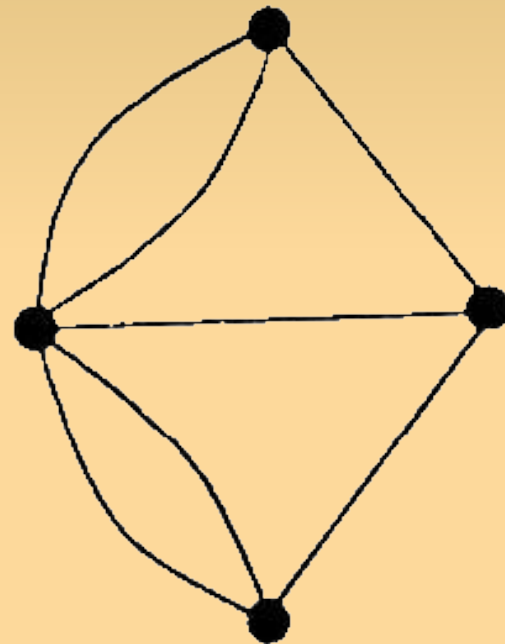


H. Poincaré

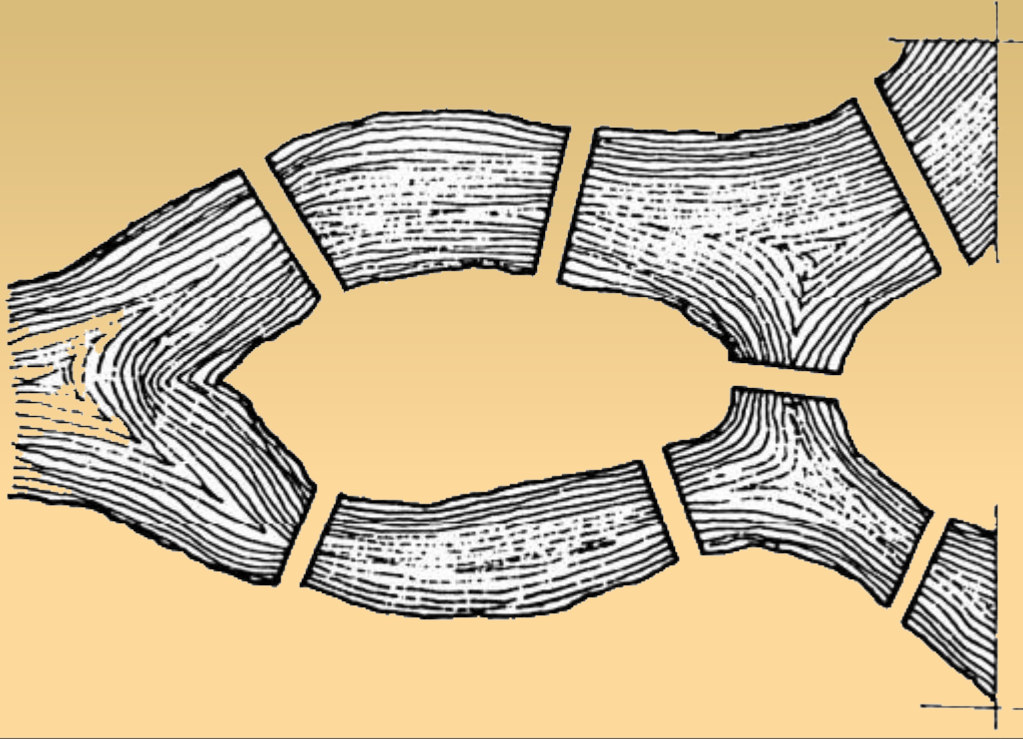
¿Y para qué sirve?

Hay 3 áreas importantes de estudio:

- Teoría de Grafos
- Teoría de Nudos
- Teoría de Superficies



Los Puentes de Königsberg



¿Se puede pasar por los siete puentes consecutivamente, sin pasar dos veces por alguno de ellos?

¿ Y ahora ...
quién podrá ayudarnos ?

!! Euler !!



¿Cómo lo hizo? Modelando

Modelando las porciones de tierra firme como nodos de una red, y los puentes como conexiones entre ellos.

**No contaban
con mi
astucia!!!**

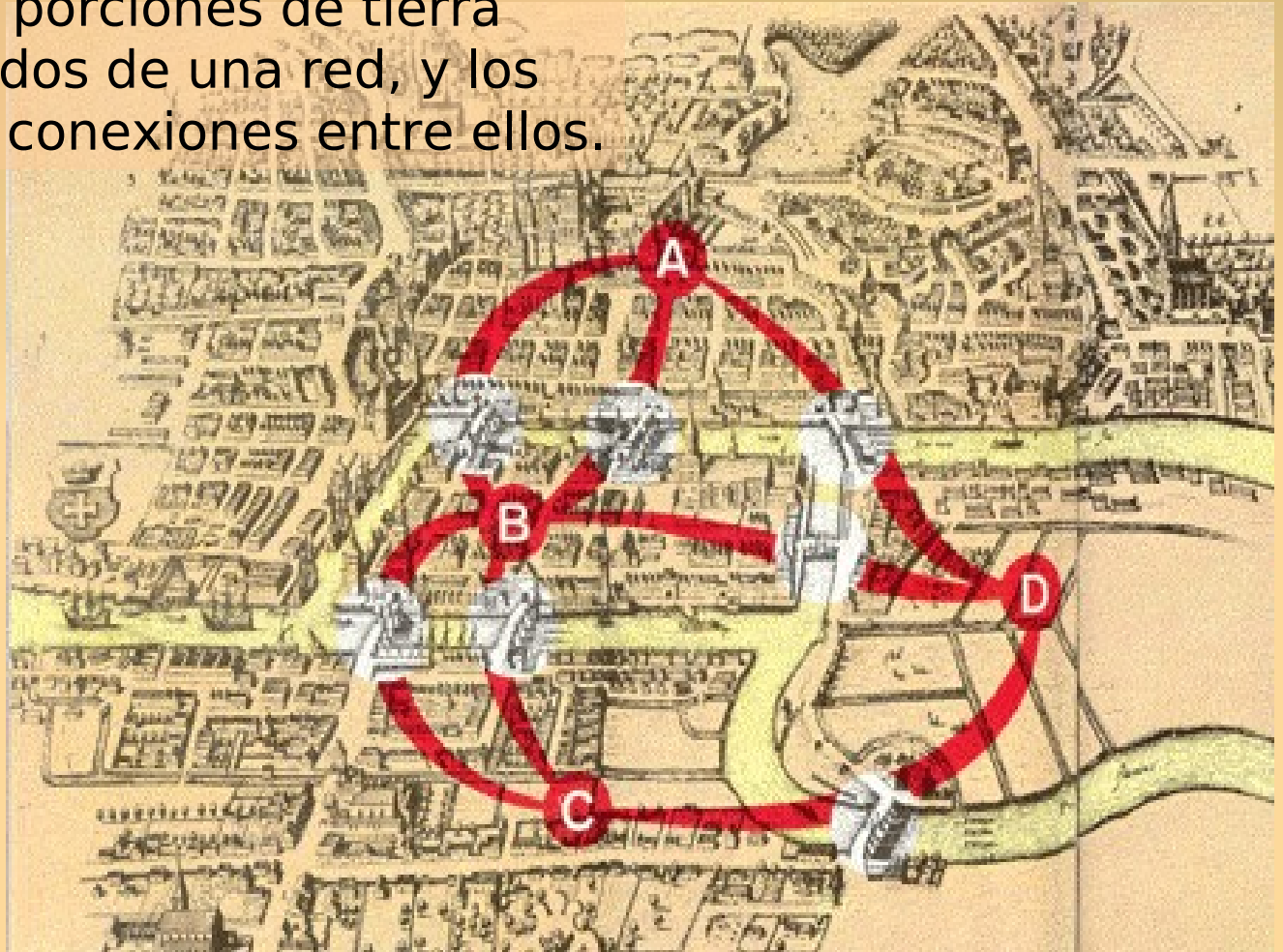
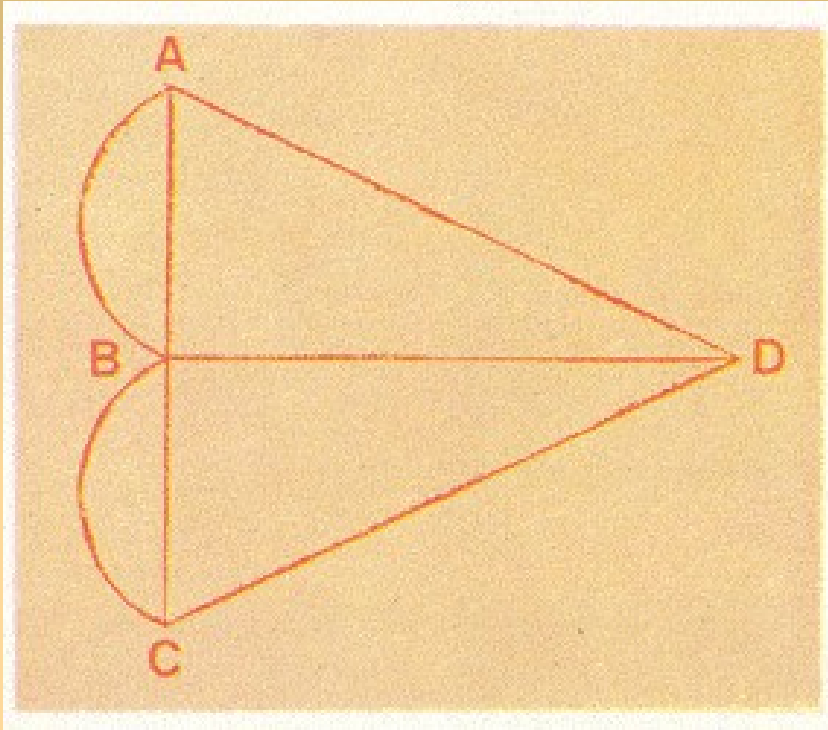


Diagrama de la Red



Este tipo de diagramas hoy son llamados “Redes de Euler”, y tienen numerosas aplicaciones. Entre ellas, Circuitos Eléctricos y Redes Neuronales.

¿Importa el largo de los caminos entre los nodos?

NO

Euler demostró que si en la red hay tres o más ***nodos con un numero impar de caminos convergiendo hacia ellos***, no se puede evitar cruzar dos veces el mismo camino al intentar recorrerla por completo.

Superficies



En la Foto: dos
superficies:
Una Dona y una Taza

Topológicamente hablando,
**la dona es lo mismo
que la taza.**

¿Y porqué? Homomorfismos

Un Homomorfismo es una función Continua y Biyectiva, cuya inversa también ha de ser Continua.



Diremos que dos superficies son iguales si existe un homomorfismo entre ellas

Entre la cara real y su imagen en el espejo, existe un homomorfismo, pues un punto y su vecindad en una, corresponde un punto y su vecindad en la otra.

Y VISCEVERSA!!!

Género

Se define también el género de una superficie como el número de cortes que se le puede hacer sin dividirla en dos

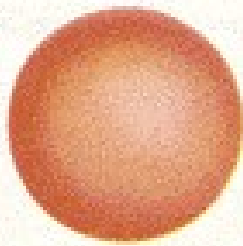


Género 0

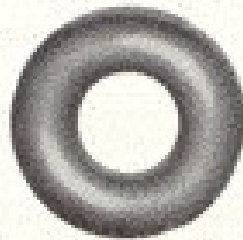
Género 1

Género 2

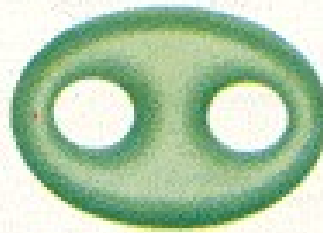
EL GÉNERO DE LOS OBJETOS COTIDIANOS



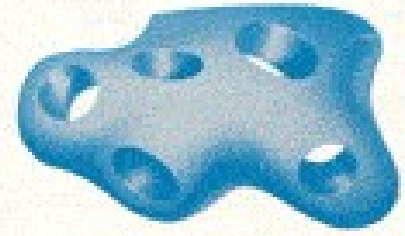
Género 0



Género 1



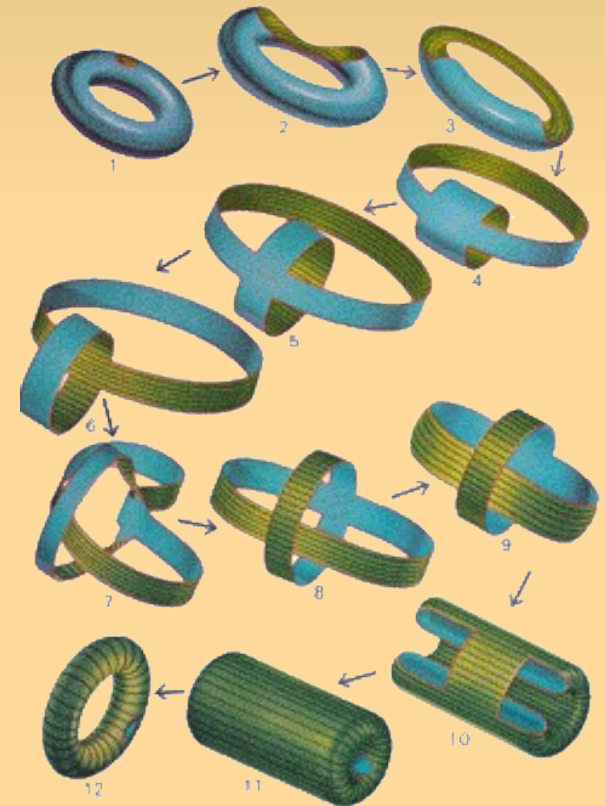
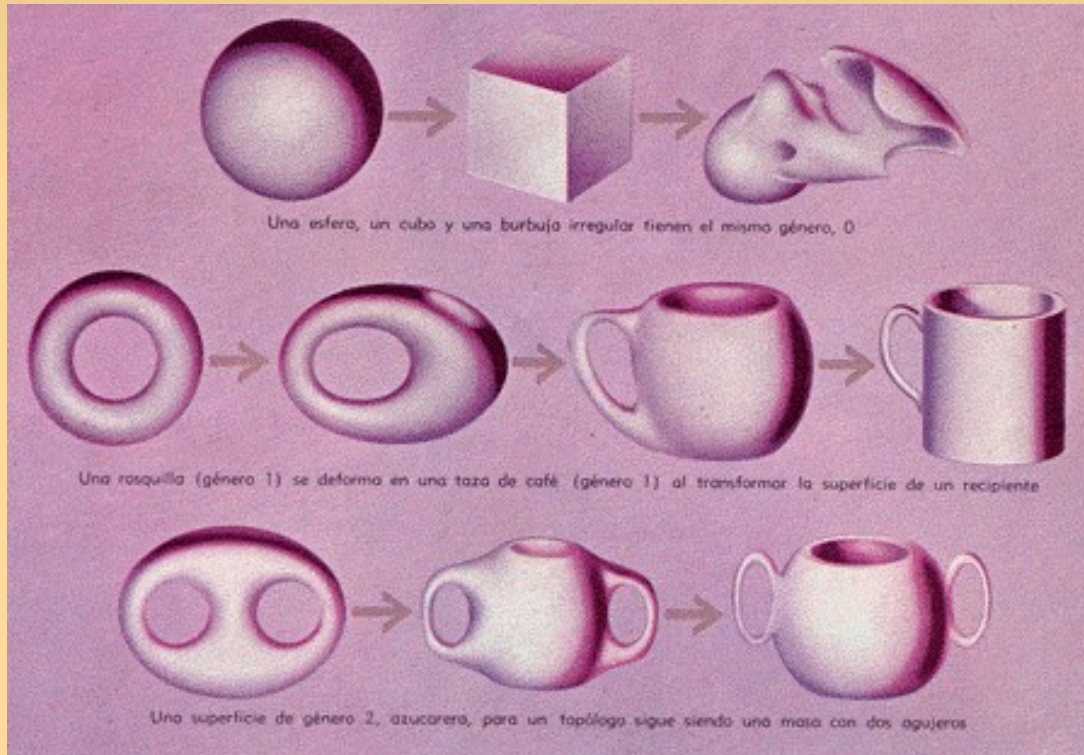
Género 2



Género 3 o más

Dona, Taza, Neumático...

Así concluimos que la dona y la taza de café son topológicamente equivalentes, pues poseen el mismo género y existe un homeomorfismo entre ellas



Orientabilidad



Ademas de su género, las superficies se pueden clasificar en Orientables y no-Orientables

Entre las ultimas figura la Cinta de Möbius, que tiene un solo lado y un solo borde

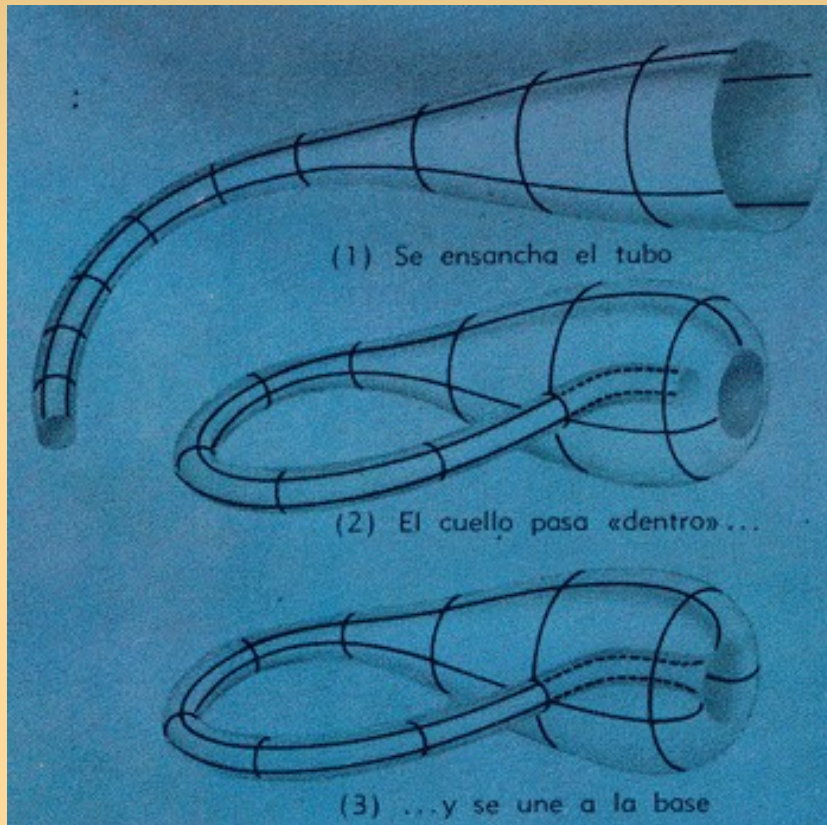
¿Un sólo lado y un sólo borde?

En efecto, al ser cortada en dos, la Cinta de Möebius se convierte en UNA cinta, con dos lados y dos bordes.



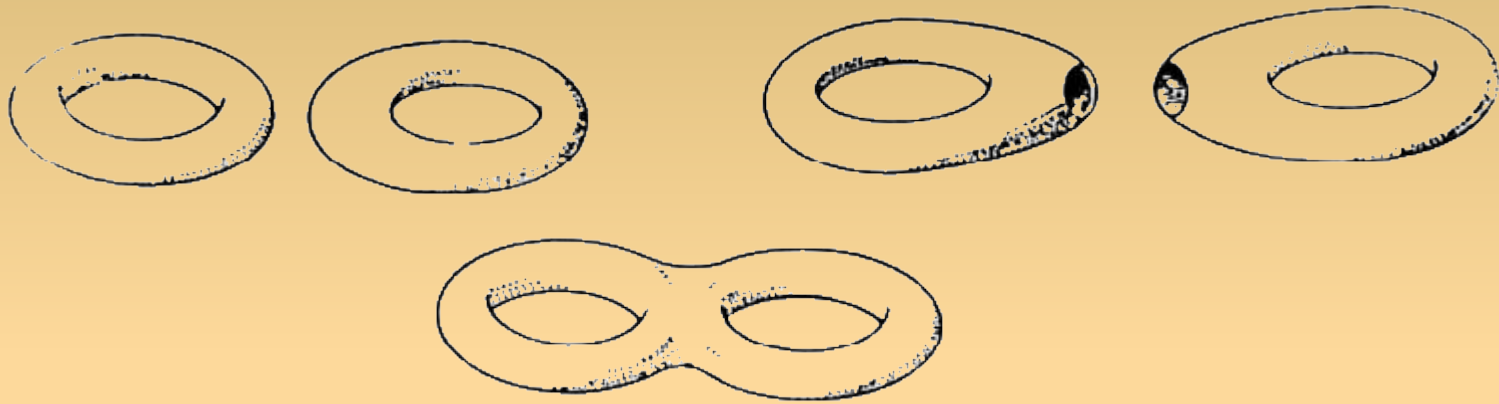
Esta botella tiene un hoyo...

Asimismo, existen otras superficies no-Orientables como es el caso de la botella de Klein



Esta es una superficie que también tiene un solo lado

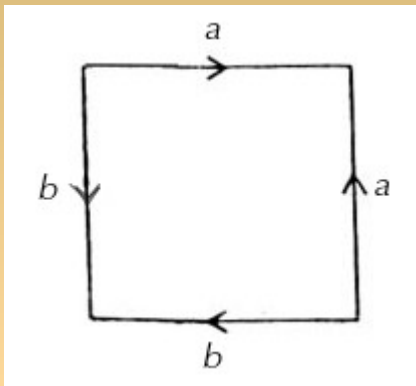
Suma conexa



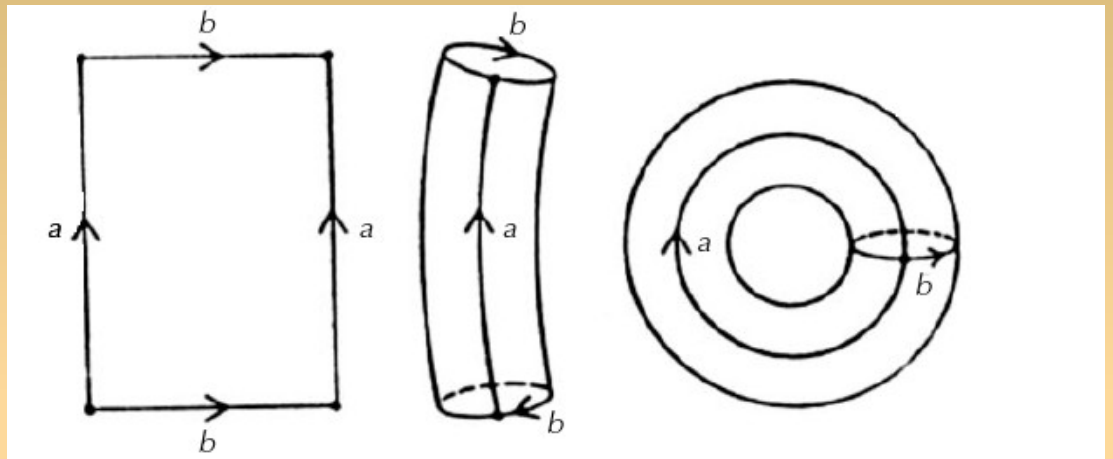
- Toda Superficie sin bordes Orientable es suma conexa de Toros.
- Toda Superficie sin bordes No-Orientable es suma conexa de Planos Proyectivos

Algunas superficies:

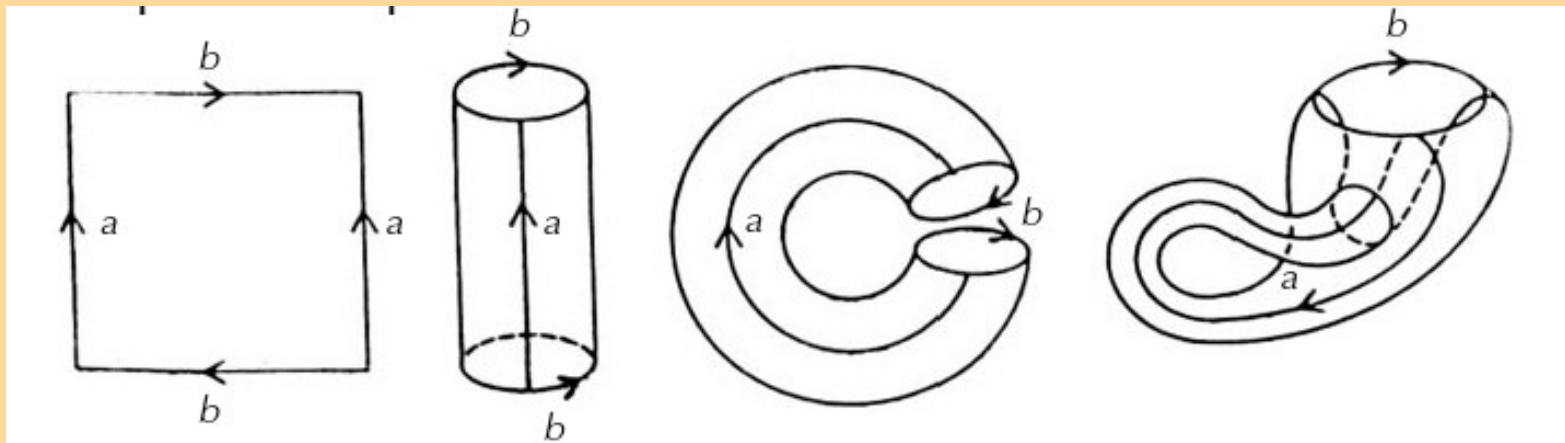
La Esfera



El Toro



La Botella de Klein



Cuatro Colores



Para Colorear un mapa plano, bastan Cuatro Colores,
en una esfera es lo mismo.

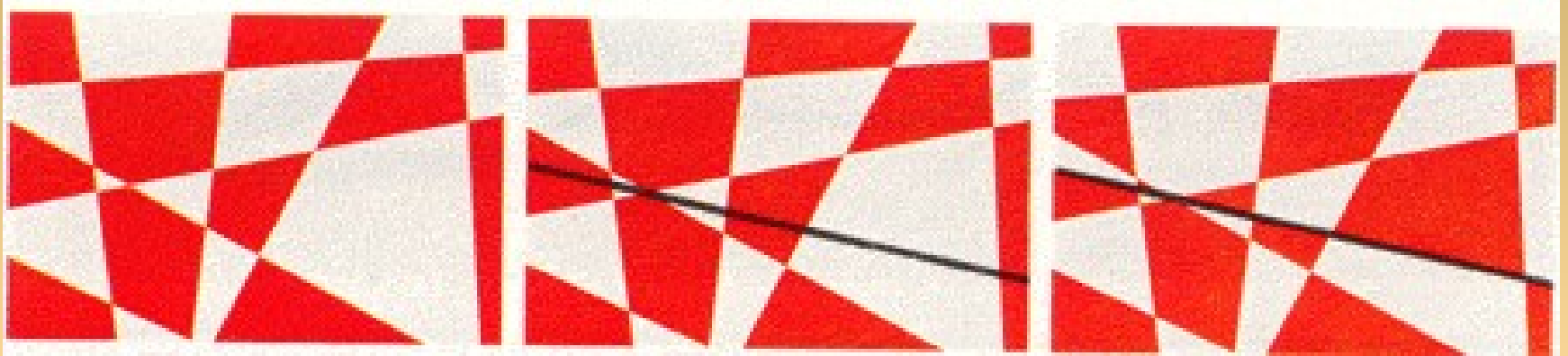
1976: Appel y Haken ... 1500 casos particulares,
1200 horas de cálculos



A pesar de lo complicado del caso del plano, se puede demostrar que sobre una Cinta de Möebius bastan Seis colores para diferenciar regiones



Asimismo, sobre un Toro, bastan 7 colores.



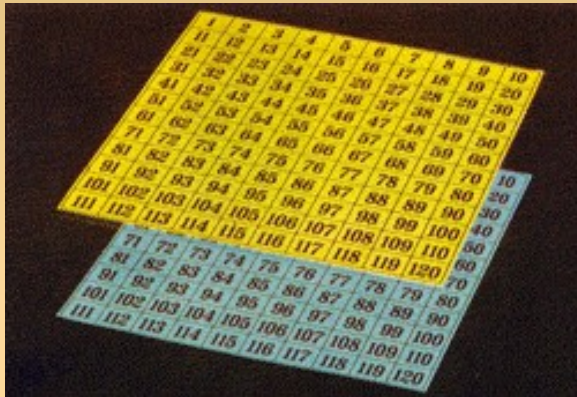
Además, si el mapa plano esta hecho solo a base de rectas, se puede demostrar gráficamente que bastan Dos Colores, como se ve en la imagen ...

Giros Topológicos



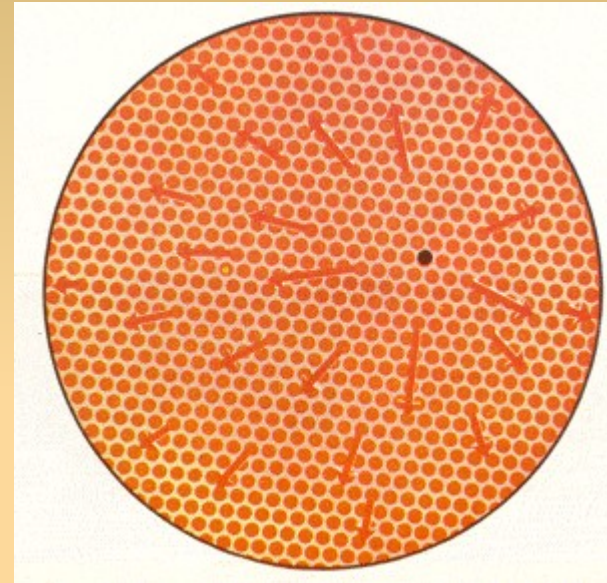
Al sacarse el chaleco con la chaqueta puesta, el tipo demuestra que el chaleco nunca estuvo dentro de la chaqueta

Teorema del Punto Fijo



Al arrugar la Hoja Numerada, al menos un punto queda sobre su correspondiente en la hoja azul

Campos de Velocidades



Lo mismo ocurre sobre la cabeza del niño, o con cualquier campo de velocidades sobre una superficie

iiiEl viento no puede soplar en toda la tierra al mismo tiempo!!!

