

### 4.3 Rectas, planos e hiperplanos.

#### A. Rectas en el espacio.

Estamos acostumbrados a escribir la ecuación de la recta como  $y = mx + b$ , donde  $m$  representa la pendiente o dirección de la recta y  $b$  su ordenada al origen. Sin embargo, esta forma para la ecuación de la recta sólo es válida para rectas en el plano  $\mathfrak{R}^2$ . En el caso general en  $\mathfrak{R}^n$  la ecuación de la recta ya no puede expresarse en términos de una sola pendiente, sino que es necesario tomar en cuenta la orientación de la recta en relación con cada uno de los  $n$  diferentes ejes coordenados. Esta orientación puede expresarse en términos de un vector de dirección, al que denotaremos por  $\vec{v}$ .

La idea entonces es encontrar la ecuación de la recta  $L$  en el espacio, que pasa por un punto conocido  $P_0$  y es paralela a un vector dado  $\vec{v}$ . En ese caso,  $L$  es el conjunto de puntos  $P$  para los cuales se cumple que

$$\vec{P_0P} \parallel \vec{v}.$$

En otras palabras, ambos vectores son múltiplos, de modo que existe algún número  $t \in \mathfrak{R}$ , tal que

$$\vec{P_0P} = t\vec{v}.$$

Introduciendo un origen de coordenadas,  $O$ , se puede definir los vectores  $\vec{x} = \vec{OP}$  y  $\vec{x}_0 = \vec{OP_0}$ , de modo que  $\vec{P_0P} = \vec{x} - \vec{x}_0$ . Así, la condición anterior se convierte en

$$\vec{x} - \vec{x}_0 = t\vec{v},$$

o, equivalentemente,

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{v}.$$

**Definición.** La ecuación vectorial paramétrica de la recta que contiene al punto  $\vec{x}_0$  y es paralela al vector  $\vec{v}$  es

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{v},$$

donde  $t \in (-\infty, \infty)$ .

Esta ecuación vectorial puede expresarse en términos de sus  $n$  componentes escalares. Para simplificar la discusión, consideremos el caso particular de rectas en  $\mathfrak{R}^3$ . En este caso, denotemos por  $\vec{v} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$  al vector de dirección,  $\vec{x}_0 = x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + z_0\hat{k}$  al punto conocido y por  $\vec{x} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$  al punto libre sobre la recta. Sustituyendo esto en la ecuación vectorial paramétrica, se obtiene

$$\begin{aligned} x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} &= (x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + z_0\hat{k}) + t(a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}) \\ &= (x_0 + at)\hat{i} + (y_0 + bt)\hat{j} + (z_0 + ct)\hat{k}. \end{aligned}$$

Igualando ahora ambos lados de la ecuación, término a término, se obtienen tres ecuaciones escalares, conocidas como las ecuaciones paramétricas de la recta.

**Definición.** Las ecuaciones paramétricas de la recta en  $\mathfrak{R}^3$  que contiene al punto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  y es paralela al vector  $\vec{v} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$  son

$$\begin{aligned}x &= x_0 + at \\y &= y_0 + bt \\z &= z_0 + ct, \quad t \in \mathfrak{R}.\end{aligned}$$

El número real  $t$  juega el papel de un parámetro, que al ir tomando valores genera los distintos puntos de la recta, como se verá en algunos de los ejemplos a continuación.

Ejemplos:

1. Encuentra las ecuaciones paramétricas de la recta en  $\mathfrak{R}^3$  con la información dada:

a) Pasa por el punto  $P(1, -2, 7)$  y es paralela al vector  $\vec{v} = 5\hat{i} + 3\hat{j} - 1\hat{k}$ .

En este caso, se tiene simplemente  $x = 1 + 5t$ ,  $y = -2 + 3t$ ,  $z = 7 - t$ ,  $t \in \mathfrak{R}$ .

b) Pasa por el origen y es paralela al vector  $\vec{v} = 4\hat{i} - 3\hat{j}$ .

Como el origen es el punto  $O(0, 0, 0)$ , por lo tanto las ecuaciones son

$$x = 4t, \quad y = -3t, \quad z = 0, \quad t \in \mathfrak{R}.$$

c) Pasa por el punto  $Q(1, 2, 3)$  y es paralela al eje  $y$ .

Podemos tomar  $\vec{v} = \hat{j}$  (o cualquier múltiplo de éste), de modo que

$$x = 1, \quad y = 2 + t, \quad z = 3, \quad t \in \mathfrak{R}.$$

2. a) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos  $A(-2, 1, 4)$  y  $B(-1, 0, 3)$ .

Podemos tomar, por ejemplo,  $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ , y el punto conocido puede ser, o bien  $A$ , o bien  $B$ . Así, cualquiera de las siguientes respuestas es válida

$$x = -2 + t, \quad y = 1 - t, \quad z = 4 - t, \quad t \in \mathfrak{R}$$

$$x = -1 + t, \quad y = -t, \quad z = 3 - t, \quad t \in \mathfrak{R}.$$

b) Encuentra algunos otros puntos, distintos de  $A$  y  $B$ , por los que pase esta recta.

Para cada valor del parámetro  $t$  se obtiene un punto diferente. Así, por ejemplo, si en la primer respuesta tomamos  $t = 2$  obtenemos el punto  $P_1(0, -1, 2)$ , si tomamos  $t = -1$  generamos el punto  $P_2(-3, 2, 5)$ , etc. Nota que el punto  $A$  se obtiene cuando  $t = 0$  y el punto  $B$  cuando  $t = 1$ .

3. Encuentra la ecuación de la recta en  $\mathfrak{R}^2$  que pasa por el punto  $P(1, 1)$  y es paralela al vector  $\vec{v} = \hat{i} - \hat{j}$ . Grafica la recta, dando valores diferentes al parámetro de la recta.

La ecuación de la recta es

$$x = 1 + t, \quad y = 1 - t, \quad t \in \mathfrak{R}$$

$t$	$x$	$y$
2	3	-1
1	2	0
0	1	1
-1	0	2
-2	-1	3

Estas dos ecuaciones equivalen a la relación  $y = 2 - x$ , que es la forma cartesiana de la ecuación de esta recta. Esta última se obtiene al eliminar el parámetro  $t$  entre ellas.

Cabe señalar que las ecuaciones paramétricas de la recta no admiten una única representación. Esto se debe a que cualquier punto de la recta puede seleccionarse como el punto conocido  $P_0$ , y que dado un vector de dirección  $\vec{v}$ , cualquier múltiplo de éste es también paralelo a la recta. Así, por ejemplo, la recta representada por las ecuaciones

$$\begin{aligned}x &= 1+t \\ y &= 1-t, \quad t \in \mathfrak{R}\end{aligned}$$

es la misma que la descrita por cualquiera de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{lll}x = 2+s & x = u & x = 1-3w \\ y = -s, \quad s \in \mathfrak{R} & y = 2-u, \quad u \in \mathfrak{R} & y = 1+3w, \quad w \in \mathfrak{R}\end{array}$$

Con base en esto, una posible representación para las ecuaciones paramétricas de los ejes coordenados es

$$\begin{array}{lll}\text{Eje X:} & O(0,0,0), \vec{v} = \hat{i} & \therefore x=t, y=0, z=0, \quad t \in \mathfrak{R}. \\ \text{Eje Y:} & O(0,0,0), \vec{v} = \hat{j} & \therefore x=0, y=t, z=0, \quad t \in \mathfrak{R}. \\ \text{Eje Z:} & O(0,0,0), \vec{v} = \hat{k} & \therefore x=0, y=0, z=t, \quad t \in \mathfrak{R}.\end{array}$$

Una forma alternativa para la ecuación de la recta se obtiene al despejar el parámetro  $t$  en cada una de las tres ecuaciones, es decir,

$$t = \frac{x-x_0}{a}, \quad t = \frac{y-y_0}{b}, \quad t = \frac{z-z_0}{c},$$

e igualar éstas entre sí. Claramente, esto sólo es posible cuando  $a \neq 0, b \neq 0$  y  $c \neq 0$ . Al resultado obtenido se le conoce como la forma simétrica de la ecuación de la recta.

**Definición.** La forma simétrica de la ecuación de la recta que contiene al punto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  y es paralela al vector  $\vec{v} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ , con  $a \neq 0, b \neq 0$  y  $c \neq 0$ , es

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}.$$

Así, la forma simétrica de las ecuaciones  $x = 1 + 3t, y = 4t, z = 5 - 2t, t \in \mathfrak{R}$ , es

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-5}{-2}.$$

Nota que esta última no describe una, sino tres ecuaciones, a saber,

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y}{4}, \quad \frac{y}{4} = \frac{z-5}{-2} \quad \text{y} \quad \frac{x-1}{3} = \frac{z-5}{-2}.$$

Cuando alguna de las componentes del vector  $\vec{v}$  es igual a cero, es posible aún contar con una forma simétrica para la ecuación de la recta correspondiente, de la siguiente manera:

caso:	Forma simétrica:
$a = 0$	$\frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}, \quad x = x_0$
$b = 0$	$\frac{x-x_0}{a} = \frac{z-z_0}{c}, \quad y = y_0$
$c = 0$	$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}, \quad z = z_0$

En el caso particular de rectas en  $\mathfrak{R}^2$ , la correspondiente forma simétrica,

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b},$$

puede reescribirse como

$$y = \frac{b}{a}(x-x_0) + y_0.$$

Esta última es la ecuación punto-pendiente de la recta ( $m = b/a$ ), con la que ya estás familiarizado. Pero no olvides que este resultado sólo es válido para rectas en  $\mathfrak{R}^2$ . Así, por ejemplo, la recta

$$L = \left\{ (x, y) \in \mathfrak{R}^2 \mid x = 1 + 3t, \quad y = -2 - 5t, \quad t \in \mathfrak{R} \right\}$$

puede escribirse en su forma simétrica como

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-5},$$

o bien, en su forma cartesiana, como

$$y = -\frac{5}{3}x - \frac{1}{3}.$$

### Segmento de recta.

Hemos visto ya que las ecuaciones paramétricas de una recta en el espacio contienen un parámetro libre,  $t \in \mathfrak{R}$ . Cada vez que  $t$  toma un valor diferente en los reales, se genera un nuevo punto a lo largo de la recta infinita. Sin embargo, si en lugar de tener la condición  $t \in \mathfrak{R}$ , el parámetro  $t$  se limitara a tomar valores dentro de un intervalo  $t_1 \leq t \leq t_2$  en los reales, entonces éste ya no generaría todos los puntos de la recta infinita, sino tan sólo un segmento de la recta.

**Definición.** Dada la recta  $L$  en  $\mathfrak{R}^3$  que contiene al punto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  y es paralela al vector  $\vec{v} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ , las ecuaciones

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct, \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

con  $t_1$  y  $t_2$  dados, determinan un segmento de la recta  $L$ .

Por ejemplo, encontremos la ecuación del segmento de recta que une los puntos  $P(-3, 2, -3)$  y  $Q(1, -1, 4)$ . Para ello, podemos tomar el vector de dirección  $\vec{v}$  como  $\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 7\hat{k}$ , de modo el segmento de recta que une esos puntos queda perfectamente descrito por las ecuaciones

$$x = -3 + 4t, \quad y = 2 - 3t, \quad z = -3 + 7t, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

En efecto, cuando  $t=0$  se obtiene el punto  $P$ , cuando  $t=1$  se obtiene el punto  $Q$  y para  $0 < t < 1$  se generan todos los puntos intermedios entre  $P$  y  $Q$ .

### Intersección de rectas.

Dada una recta  $L_1$ , con parámetro  $t$ , y una segunda recta  $L_2$ , con parámetro  $s$ , resulta de interés determinar el punto donde ambas se intersecan. El procedimiento para encontrar este punto consiste simplemente en igualar término a término sus ecuaciones paramétricas, con el fin de determinar para qué valores específicos de los parámetros  $t$  y  $s$  ocurre dicha intersección. Una vez calculados estos valores, se sustituyen finalmente en las ecuaciones paramétricas, para obtener las coordenadas del punto de intersección.

Los siguientes ejemplos ilustran los posibles casos que pudieran ocurrir al intersecar dos rectas en  $\mathfrak{R}^n$ , a saber, que exista un único punto de intersección, que exista una infinidad de puntos de intersección (rectas coincidentes), o que no exista intersección alguna (rectas paralelas dentro de un mismo plano, o bien, rectas en diferentes planos).

Ejemplos:

1. Determina el punto de intersección de las siguientes rectas:

$$L_1 = \left\{ (x, y) \in \mathfrak{R}^2 \mid x = t, \quad y = 2 - t, \quad t \in \mathfrak{R} \right\}$$

$$L_2 = \left\{ (x, y) \in \mathfrak{R}^2 \mid x = -1 + s, \quad y = -1 + s, \quad s \in \mathfrak{R} \right\}.$$

Las rectas se intersecan cuando coinciden sus coordenadas  $x$  y  $y$ , es decir, cuando

$$t = -1 + s \quad \text{y} \quad 2 - t = -1 + s.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones simultáneas en  $t$  y  $s$  se obtienen los valores

$$t = 1 \quad \text{y} \quad s = 2.$$

Finalmente, sustituyendo estos valores en las ecuaciones paramétricas, se obtiene que el punto de intersección es

$$x = 1 \quad \text{y} \quad y = 1.$$

2. Determina el punto de intersección de las siguientes rectas:

$$L_1 = \left\{ (x, y) \in \mathfrak{R}^2 \mid x = t, \quad y = t, \quad t \in \mathfrak{R} \right\}$$

$$L_2 = \left\{ (x, y) \in \mathfrak{R}^2 \mid x = s, \quad y = 1 + s, \quad s \in \mathfrak{R} \right\}.$$

Igualamos sus coordenadas  $x$  y  $y$ , obteniendo

$$t = s \quad \text{y} \quad t = 1 + s.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones simultáneas en  $t$  y  $s$  se obtiene una inconsistencia ( $1 = 0$ ), de modo que las rectas no se intersecan.

3. Determina el punto de intersección de las siguientes rectas:

$$L_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = t, y = t, t \in \mathbb{R}\}$$

$$L_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1 - s, y = 1 - s, s \in \mathbb{R}\}.$$

Igualamos sus coordenadas  $x$  y  $y$ , obteniendo

$$t = 1 - s \text{ y } t = 1 - s.$$

Notamos que ambas ecuaciones son idénticas, de modo que el sistema tiene solución múltiple. En otras palabras, las rectas coinciden en todos sus puntos.

4. Determina el punto de intersección de las siguientes rectas:

$$L_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2 + 3a, y = -4 - 2a, z = -1 + 4a, a \in \mathbb{R}\}$$

$$L_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x-6}{4} = \frac{y+2}{2} = -\frac{z+3}{2} \right\}.$$

Primero escribimos la ecuación de la segunda recta en forma paramétrica, como

$$L_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 6 + 4b, y = -2 + 2b, z = -3 - 2b, b \in \mathbb{R}\}.$$

Después igualamos sus coordenadas  $x$ ,  $y$  y  $z$ , obteniendo

$$2 + 3a = 6 + 4b, \quad -4 - 2a = -2 + 2b \text{ y } -1 + 4a = -3 - 2b.$$

Aquí se tiene un sistema de 3 ecuaciones simultáneas con 2 incógnitas, de modo que debemos verificar cuidadosamente que éste sea consistente. En este caso sí lo es, obteniéndose los valores

$$a = 0 \text{ y } b = -1.$$

Finalmente, sustituyendo estos valores en las ecuaciones paramétricas, se obtiene que el punto de intersección es

$$x = 2, \quad y = -4 \text{ y } z = -1.$$

5. Determina el punto de intersección de las siguientes rectas:

$$L_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 3 + u, y = 2 - 4u, z = u, u \in \mathbb{R}\}$$

$$L_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 4 - w, y = 3 + w, z = -2 + 3w, w \in \mathbb{R}\}.$$

Igualamos sus coordenadas  $x$ ,  $y$  y  $z$ , obteniendo

$$3 + u = 4 - w, \quad 2 - 4u = 3 + w \text{ y } u = -2 + 3w.$$

Al tratar de resolver este sistema de 3 ecuaciones simultáneas con 2 incógnitas, se obtiene una inconsistencia en los valores de los parámetros. Por lo tanto, estas rectas no se intersecan. A diferencia de las rectas en el plano  $\mathbb{R}^2$ , el hecho de que estas rectas no se intersequen no se debe a que éstas sean paralelas, sino a que ambas pertenecen a planos diferentes.

## B. Planos en el espacio.

Se trata de encontrar la ecuación del plano  $\mathcal{P}$  en el espacio, que pasa por un punto conocido  $P_0$  y es perpendicular a un vector normal  $\vec{n}$ . En ese caso,  $\mathcal{P}$  es el conjunto de puntos  $P$  para los cuales se cumple que

$$\vec{P_0P} \perp \vec{n}.$$

En otras palabras,

$$\vec{n} \cdot \vec{P_0P} = 0.$$

Introduciendo un origen de coordenadas,  $O$ , se puede definir los vectores  $\vec{x} = \vec{OP}$  y  $\vec{x}_0 = \vec{OP_0}$ , de modo que  $\vec{P_0P} = \vec{x} - \vec{x}_0$ . Así, la condición anterior se convierte en

$$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) = 0.$$

**Definición.** La ecuación del plano que contiene al punto  $\vec{x}_0$  y es perpendicular al vector  $\vec{n}$  es

$$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) = 0.$$

Esta ecuación, conocida como ecuación cartesiana del plano, puede reescribirse en términos más simples llevando a cabo el producto escalar. En el caso particular de planos en  $\mathfrak{R}^3$  la definición anterior se convierte en

**Definición.** La ecuación del plano en  $\mathfrak{R}^3$  que contiene al punto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  y es perpendicular al vector  $\vec{v} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$  es

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Por ejemplo, la ecuación del plano que pasa por el punto  $P(1, 0, -3)$  y es perpendicular al vector  $\vec{v} = 5\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$  se obtiene de

$$(5)(x - 1) + (1)(y - 0) + (-2)(z - (-3)) = 0.$$

Llevando a cabo las operaciones algebraicas correspondientes, esta ecuación se reduce a

$$5x + y - 2z = 11.$$

En general, la ecuación del plano siempre puede escribirse como

$$ax + by + cz = d,$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son las componentes del vector normal al plano, y  $d = ax_0 + by_0 + cz_0$ .

Ejemplos:

1. Encuentra las coordenadas de tres puntos contenidos en el plano  $3x + 2y + 4z = 12$ .  
Los puntos se obtienen simplemente al encontrar valores  $x$ ,  $y$  y  $z$  que satisfagan la ecuación  $3x + 2y + 4z = 12$ . Así, por ejemplo, están los puntos  $P_1(2,3,0)$ ,  $P_2(0,0,3)$  y  $P_3(0,-2,4)$ .

2. Encuentra la ecuación del plano que contiene a los puntos  $A(1,1,1)$ ,  $B(2,1,3)$  y  $C(3,2,1)$ .

El vector normal  $\vec{n}$  puede construirse como el producto cruz de cualesquiera dos vectores no paralelos en el plano. Por ejemplo, si se consideran los vectores

$$\vec{AB} = \hat{i} + 2\hat{k} \quad \text{y} \quad \vec{AC} = 2\hat{i} + \hat{j},$$

se tiene

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = -2\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}.$$

Tomando como punto conocido al punto  $A(1,1,1)$ , la ecuación del plano es

$$(-2)(x-1) + (4)(y-1) + (1)(z-1) = 0,$$

o bien,

$$-2x + 4y + z = 3.$$

Este resultado es independiente de la selección del punto o del vector normal  $\vec{n}$ .

3. Encuentra la ecuación del plano que contiene a las siguientes dos rectas:

$$L_1: \quad x = 1+t, \quad y = 1-t, \quad z = t, \quad t \in \mathfrak{R}$$

$$L_2: \quad x = 2-s, \quad y = 3, \quad z = 1-s, \quad s \in \mathfrak{R}.$$

Como las rectas  $L_1$  y  $L_2$  determinan un plano, y no son paralelas entre sí, el producto cruz  $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$  de sus vectores de dirección  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$  es un vector perpendicular a ese plano.

Como en este caso los vectores de dirección de las rectas son  $\vec{v}_1 = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$  y  $\vec{v}_2 = -\hat{i} - \hat{k}$ , por lo tanto un vector normal  $\vec{n}$  al plano es  $\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \hat{i} - \hat{k}$ . Por otra parte, cualquier punto de las rectas es un punto del plano. Tomando al punto  $P(1,1,0)$  de  $L_1$  como el punto conocido, la ecuación del plano es

$$(1)(x-1) + (0)(y-1) + (-1)(z-0) = 0,$$

es decir,

$$x - z = 1.$$

4. Encuentra la ecuación del plano que pasa por el punto  $P(1,2,3)$  y es paralelo al plano  $5x - 3y + 2z = 11$ .

Como lo muestra la figura, si un plano  $\mathbf{p}_1$ , con vector normal  $\vec{n}_1$ , es paralelo a otro plano  $\mathbf{p}_2$ , con vector normal  $\vec{n}_2$ , entonces los vectores  $\vec{n}_1$  y  $\vec{n}_2$  también son paralelos entre sí:

De este modo, el vector normal  $\vec{n}$  al plano que estamos buscando puede escogerse simplemente como  $\vec{n} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ , que es el vector normal al plano  $5x - 3y + 2z = 11$ . Así, la ecuación del plano es

$$(5)(x-1) + (-3)(y-2) + (2)(z-3) = 0,$$

o bien,

$$5x - 3y + 2z = 5.$$

5. Encuentra la ecuación del plano que pasa por el punto  $P(1,1,1)$  y es normal a la recta

$$\frac{x-1}{2} = y+1 = -\frac{z}{2}.$$

Como lo muestra la figura, si un plano  $\mathbf{p}$ , con vector normal  $\vec{n}$ , es perpendicular a una recta  $L$ , con vector de dirección  $\vec{v}$ , entonces los vectores  $\vec{n}$  y  $\vec{v}$  son paralelos entre sí:

De este modo, el vector normal  $\vec{n}$  al plano que estamos buscando puede escogerse simplemente como  $\vec{n} = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ , que es el vector de dirección de la recta

$$\frac{x-1}{2} = y+1 = -\frac{z}{2}.$$
 Así, la ecuación del plano es

$$(2)(x-1) + (1)(y-1) + (-2)(z-1) = 0,$$

o bien,

$$2x + y - 2z = 1.$$

Por lo general, la gráfica de un plano de la forma  $ax + by + cz = d$  en  $\mathfrak{R}^3$  se construye a partir de las intersecciones de éste con los ejes coordenados. Por ejemplo, la siguiente figura muestra la gráfica del plano  $3x + 2y + 4z = 12$ .

Una gráfica como la anterior presupone que los coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  en la ecuación  $ax + by + cz = d$  son todos diferentes de cero. A continuación se muestra la gráfica de algunos casos especiales, en donde uno o varios de los coeficientes  $a$ ,  $b$  o  $c$  pueda ser igual a cero.

$$c = 0 \Rightarrow ax + by = d \\ (z \text{ libre})$$

$$b = 0 \Rightarrow ax + cz = d \\ (y \text{ libre})$$

$$a = 0 \Rightarrow by + cz = d \\ (x \text{ libre})$$

$$a = b = 0 \Rightarrow cz = d \\ (x, y \text{ libres})$$

$$a = c = 0 \Rightarrow by = d \\ (x, z \text{ libres})$$

$$b = c = 0 \Rightarrow ax = d \\ (y, z \text{ libres})$$

Ejemplos:

1. Dibuja los siguientes planos:

a)  $2x + 3y = 6$

b)  $x + z = 1$

c)  $z = 4$

d)  $y = 3$

2. Encuentra las ecuaciones de los planos coordenados en  $\mathbb{R}^3$ .

En cada caso, podemos tomar como punto conocido el origen  $(0,0,0)$ , y como vector normal alguno de los vectores base. Las ecuaciones correspondientes son:

	vector normal	ecuación del plano:
plano $XY$	$\vec{n} = \hat{k}$	$z = 0$
plano $YZ$	$\vec{n} = \hat{i}$	$x = 0$
plano $XZ$	$\vec{n} = \hat{j}$	$y = 0$

**Intersección de rectas con planos.**

La intersección de una recta  $L$  y un plano  $P$  puede ocurrir en un único punto, en todos los puntos de la recta, o puede no existir intersección del todo.

Los siguientes ejemplos ilustran el procedimiento para obtener el (los) punto (s) de intersección de una recta con un plano.

1. Encuentra el punto de intersección de la recta  $L$  y el plano  $P$ , si

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1 - 3t, \quad y = 5t, \quad z = 2 + t, \quad t \in \mathbb{R}\}$$

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 3\}.$$

Sustituimos  $x = 1 - 3t$ ,  $y = 5t$  y  $z = 2 + t$  en la ecuación del plano, es decir

$$(1 - 3t) + 2(5t) - 3(2 + t) = 3,$$

de donde se obtiene  $t = 2$ . Es decir, la intersección ocurre cuando el parámetro  $t$  es igual a 2, y esto ocurre en el punto

$$x = 1 - 3(2) = -5$$

$$y = 5(2) = 10$$

$$z = 2 + (2) = 4.$$

En otras palabras, la recta y el plano se intersecan en el punto  $P(-5,10,4)$ .

2. Encuentra el punto de intersección de la recta  $L$  y el plano  $P$ , si

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 3, \quad y = 4, \quad z = 2 + t, \quad t \in \mathbb{R}\}$$

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 5y = 10\}.$$

Sustituimos  $x = 3$ ,  $y = 4$  en  $2x + 5y$ , obteniendo  $2(3) + 5(4) = 26 \neq 10$ , de modo que no hay intersección entre la recta y el plano.

3. Encuentra el punto de intersección de la recta  $L$  y el plano  $\mathbf{p}$ , si

$$L = \left\{ (x, y, z) \in \mathfrak{R}^3 \mid x = 1+t, y = 1-t, z = t, t \in \mathfrak{R} \right\}$$

$$\mathbf{p} = \left\{ (x, y, z) \in \mathfrak{R}^3 \mid x - z = 1 \right\}.$$

Sustituimos  $x = 1+t$ ,  $y = 1-t$  y  $z = t$  en la ecuación del plano, obteniendo

$$(1+t) - (t) = 1,$$

que se cumple para toda  $t$ . Es decir, la intersección ocurre a lo largo de toda la recta.

### Intersección de planos con planos.

La intersección de dos planos  $\mathbf{p}_1$  y  $\mathbf{p}_2$  puede ocurrir a lo largo de una recta  $L$ , en todos los puntos de los planos (planos coincidentes) o puede no existir intersección del todo.

Los siguientes ejemplos ilustran el procedimiento para obtener los puntos de intersección de dos planos.

1. Encuentra los puntos de intersección de los planos

$$\mathbf{p}_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathfrak{R}^3 \mid 2x + 4y + 4z = 8 \right\}$$

$$\mathbf{p}_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathfrak{R}^3 \mid x + 3y - z = -1 \right\}.$$

Las ecuaciones  $2x + 4y + 4z = 8$  y  $x + 3y - z = -1$  constituyen un sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas, de tal modo que, de existir solución, ésta tendrá una variable libre (por ejemplo,  $z$ ). Para proceder podemos despejar  $x$  de la segunda ecuación,

$$x = -1 - 3y + z,$$

y luego la sustituimos en la primera ecuación, es decir,  $2(-1 - 3y + z) + 4y + 4z = 8$ , de modo que

$$y = -5 + 3z.$$

Este valor de  $y$  se sustituye en la ecuación anterior para  $x$ , es decir,  $x = -1 - 3(-5 + 3z) + z$ , obteniendo,

$$x = 14 - 8z.$$

Así, la solución es

$$x = 14 - 8z$$

$$y = -5 + 3z$$

$$z \text{ libre,}$$

o bien, en forma paramétrica

$$x = 14 - 8t$$

$$y = -5 + 3t$$

$$z = t, \quad t \in \mathfrak{R}.$$

En otras palabras, los planos  $\mathbf{p}_1$  y  $\mathbf{p}_2$  se intersecan en la recta  $x = 14 - 8t$ ,  $y = -5 + 3t$ ,  $z = t$ ,  $t \in \mathfrak{R}$ .

2. Encuentra los puntos de intersección de los planos

$$p_1 = \{(x, y, z) \in \mathfrak{R}^3 \mid 5x - 7y + 4z = 18\}$$

$$p_2 = \{(x, y, z) \in \mathfrak{R}^3 \mid 10x - 14y + 8z = 24\}.$$

Si multiplicamos la primera ecuación por 2 al resultado le restamos la segunda ecuación, obtenemos que  $0 = 12$ , lo cual es inconsistente. En otras palabras, los planos  $p_1$  y  $p_2$  no se intersecan.

3. Encuentra los puntos de intersección de los planos

$$p_1 = \{(x, y, z) \in \mathfrak{R}^3 \mid 5x - 7y + 4z = 18\}$$

$$p_2 = \{(x, y, z) \in \mathfrak{R}^3 \mid 10x - 14y + 8z = 36\}.$$

Si multiplicamos la primera ecuación por 2 y al resultado le restamos la segunda ecuación, obtenemos que  $0 = 0$ , lo cual significa que los planos se intersecan en todos sus puntos, es decir, se trata de planos coincidentes.

### Ángulo entre planos.

El ángulo que forman entre sí dos planos es simplemente el ángulo entre sus vectores normales, como lo muestra la figura. Así, si  $p_1$  es un plano, con vector normal  $\vec{n}_1$ , y  $p_2$  es un segundo plano, con vector normal  $\vec{n}_2$ , entonces el ángulo  $q$  entre los dos planos está dado por

$$q = \cos^{-1} \left( \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|} \right).$$

Ejemplo: Encuentra el ángulo entre los planos  $3x - 6y - 2z = 15$  y  $2x + y - 2z = 5$ .

En este caso, los vectores normales son  $\vec{n}_1 = 3\hat{i} - 6\hat{j} - 2\hat{k}$  y  $\vec{n}_2 = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ . Como  $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 6 - 6 + 4 = 4$ ,  $\|\vec{n}_1\| = \sqrt{9 + 36 + 4} = 7$  y  $\|\vec{n}_2\| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$ , por lo tanto

$$q = \cos^{-1} \left( \frac{4}{(3)(7)} \right) = \cos^{-1} \left( \frac{4}{21} \right) = 1.38 \text{ rad } (= 79^\circ).$$

### Ecuación paramétrica del plano.

Además de la representación cartesiana que ya vimos, la ecuación del plano también admite una representación paramétrica, que presentaremos muy brevemente.

**Definición.** La ecuación vectorial paramétrica del plano que contiene al punto  $\vec{x}_0$  y a dos vectores no paralelos  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  es

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{u} + s\vec{v},$$

donde  $s, t \in (-\infty, \infty)$ .

Para pasar de la ecuación cartesiana del plano a su ecuación paramétrica, se parametrizan dos de las tres variables,  $x$ ,  $y$  o  $z$ , como se muestra a continuación.

Ejemplo: Encuentra la ecuación paramétrica del plano  $x + 2y - z = 3$  en  $\mathfrak{R}^3$ .  
 Simplemente podemos proponer la parametrización  $y = t$  y  $z = s$ , de modo que

$$\begin{aligned} x &= 3 - 2t + s \\ y &= t \\ z &= s, \quad t, s \in \mathfrak{R}. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones pueden expresarse en forma vectorial como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathfrak{R},$$

que es de la forma  $\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{u} + s\vec{v}$ , con  $\vec{x}_0 = 3\hat{i}$ ,  $\vec{u} = -2\hat{i} + \hat{j}$  y  $\vec{v} = \hat{i} + \hat{k}$ .

En relación con el ejemplo anterior cabe señalar que  $\vec{u} \times \vec{v} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ , que es precisamente el vector normal  $\vec{n}$  al plano  $x + 2y - z = 3$ .

### C. Hiperplanos.

Los conceptos anteriores para la ecuación del plano en  $\mathfrak{R}^3$  pueden extenderse trivialmente para el caso de  $\mathfrak{R}^n$ , en donde el lugar geométrico correspondiente se conoce como hiperplano, en lugar de plano. Baste presentar aquí su definición, así como unos cuantos ejemplos ilustrativos.

**Definición.** La ecuación del hiperplano en  $\mathfrak{R}^n$  que contiene al punto  $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  y es perpendicular al vector  $\vec{v} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  es

$$a_1(x_1 - x_1^0) + a_2(x_2 - x_2^0) + \dots + a_n(x_n - x_n^0) = 0.$$

Por ejemplo, la ecuación del hiperplano en  $\mathfrak{R}^4$  que contiene al punto  $P(1, -2, 0, 3)$  y es normal al vector  $\vec{v} = (5, 2, 3, -1)$  está dada por

$$5(x_1 - 1) + 2(x_2 - (-2)) + 3(x_3 - 0) - (x_4 - 3) = 0,$$

es decir,

$$5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -2.$$

Otro ejemplo lo constituye la ecuación presupuestal,  $p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n = m$ , conocida también como hiperplano presupuestal, cuyo vector normal es el vector de precios,  $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ .

#### 4.4 Curvas paramétricas. Vector tangente a una curva paramétrica.

Con el fin de motivar el tema de curvas paramétricas, considera el siguiente ejemplo de economía.

Sea  $u(x_1, x_2)$  la función de utilidad correspondiente a una canasta  $(x_1, x_2)$  de dos bienes, donde  $x_1$  denota la cantidad del bien 1 y  $x_2$  la del bien 2. Los precios unitarios de estos bienes son, respectivamente,  $p_1$  y  $p_2$ , los cuales se supondrán fijos. Si se dispone de un presupuesto  $m$ , entonces la restricción presupuestal está dada por la ecuación  $p_1x_1 + p_2x_2 = m$ . A partir de esto, planteamos el problema de optimización

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & u(x_1, x_2) \\ \text{Sujeto a} & p_1x_1 + p_2x_2 = m, \end{array}$$

cuyo óptimo,  $(x_1^*, x_2^*)$ , es el punto de tangencia de la recta presupuestal con alguna curva de indiferencia de la función  $u$ , como posiblemente hayas aprendido en tus cursos de economía.

Es claro que la canasta óptima depende del valor del parámetro presupuestal  $m$ , es decir,

$$(x_1^*, x_2^*) = (x_1^*(m), x_2^*(m)).$$

La siguiente figura muestra cómo el óptimo se va moviendo a lo largo de distintas curvas de indiferencia, a medida que el parámetro presupuestal  $m$  cambia de valor. La trayectoria que sigue la canasta óptima, como función del parámetro  $m$ , se conoce como curva de ingreso-consumo.

Esta trayectoria puede representarse como una función vectorial,  $\vec{r}: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}^2$ , que para cada valor  $m \in \mathfrak{R}^+$  te devuelve un vector  $\vec{r} \in \mathfrak{R}^2$ , dado por

$$\vec{r} = x_1^*(m)\hat{i} + x_2^*(m)\hat{j}.$$

Esto último es un ejemplo de lo que se conoce como curva paramétrica.

En la Sección anterior estudiamos ya otro ejemplo de curva paramétrica, que es el de la recta. En el caso particular de una recta en el espacio, ésta puede entenderse como una función vectorial,  $\vec{r}: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}^3$ , que a cada valor  $t \in \mathfrak{R}$  le asocia un vector  $\vec{r} = (x, y, z)$ , cuyas componentes están dadas por  $x = x_0 + at$ ,  $y = y_0 + bt$ ,  $z = z_0 + ct$ .

**Definición.** Una curva paramétrica  $\vec{r}(t)$  es una función vectorial,  $\vec{r} : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}^n$ , que a cada valor  $t \in \mathfrak{R}$  asigna un único vector  $\vec{r}(t) \in \mathfrak{R}^n$ .

En el caso particular del plano  $\mathfrak{R}^2$  una curva puede representarse tanto en forma cartesiana, mediante una función escalar de las variables  $x$  y  $y$ ,

$$F(x, y) = 0,$$

como en forma paramétrica, mediante una función vectorial

$$\vec{r}(t) = f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j},$$

donde las componentes del vector son ambas funciones de un parámetro  $t \in \mathfrak{R}$ .

Por ejemplo, la recta  $y = x + 1$  puede representarse en forma paramétrica como

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j},$$

donde

$$x(t) = 1 + t$$

$$y(t) = 2 + t, \quad t \in \mathfrak{R}.$$

Asimismo, la circunferencia  $x^2 + y^2 = r^2$  puede representarse en forma paramétrica como

$$\vec{r}(q) = x(q)\hat{i} + y(q)\hat{j},$$

donde

$$x(q) = r \cos q$$

$$y(q) = r \sin q, \quad 0 \leq q < 2\pi.$$

Para el caso de una curva en  $\mathfrak{R}^3$  no es posible representar su ecuación en forma cartesiana, sino solamente como una ecuación paramétrica, de la forma

$$\vec{r}(t) = f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j} + h(t)\hat{k},$$

con  $t \in \mathfrak{R}$ . Un ejemplo de este tipo de curvas lo constituye la hélice mostrada en la figura, cuya ecuación paramétrica es

$$\vec{r}(t) = (\cos t)\hat{i} + (\sin t)\hat{j} + t\hat{k}.$$

En vista de que una curva paramétrica  $\vec{r}(t)$  es una función del parámetro  $t$ , tiene sentido preguntarse sobre su razón de cambio o derivada,  $d\vec{r}(t)/dt$ , con respecto al parámetro  $t$ . Para ello, primero sería necesario definir los conceptos de límite y continuidad, pero aquí omitiremos su definición formal por falta de tiempo.

**Definición.** Sea  $\vec{r}(t)$  una función vectorial, con  $\vec{r} : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}^n$ . La derivada de  $\vec{r}(t)$  con respecto a  $t$  es la función vectorial  $d\vec{r}(t)/dt$  dada por

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t},$$

cuando este límite existe.

De acuerdo con la definición anterior, se sigue el siguiente resultado:

El vector  $d\vec{r}(t)/dt$  es el vector tangente a la curva descrita por  $\vec{r}(t)$  en cada punto determinado por  $t$ .

El cálculo de la derivada  $d\vec{r}(t)/dt$  es muy sencillo en general. Por ejemplo, es posible demostrar que en el caso particular de una función vectorial

$$\vec{r}(t) = f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j} + h(t)\hat{k}$$

en  $\mathfrak{R}^3$ , la derivada de  $\vec{r}(t)$  está dada por

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{df(t)}{dt} \hat{i} + \frac{dg(t)}{dt} \hat{j} + \frac{dh(t)}{dt} \hat{k},$$

siempre y cuando  $f$ ,  $g$  y  $h$  sean todas funciones diferenciables de  $t$ .

Ejemplo:

Encuentra el vector tangente a la hélice  $\vec{r}(t) = (\cos t)\hat{i} + (\sin t)\hat{j} + t\hat{k}$  en el punto determinado por  $t = 0$ .

Por una parte, el punto determinado por  $t = 0$  es

$$\vec{r}(0) = \hat{i}.$$

Por otra parte, la derivada  $d\vec{r}(t)/dt$  es la función vectorial

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = -\sin t \hat{i} + \cos t \hat{j} + \hat{k},$$

que en  $t = 0$  se convierte en el vector

$$\left. \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right|_{t=0} = \hat{j} + \hat{k}.$$

Por lo tanto, el vector tangente a la curva  $\vec{r}(t)$  en el punto  $\vec{r}(0) = \hat{i}$  es  $\hat{j} + \hat{k}$ .

**Reglas de diferenciación de curvas paramétricas.**

Sean  $\vec{u} : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}^n$ ,  $\vec{v} : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}^n$  y  $\mathbf{a} : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  funciones diferenciables de  $t$ ,  $k \in \mathfrak{R}$  y  $\vec{c} \in \mathfrak{R}^n$ . Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1.  $\frac{d\vec{c}}{dt} = \vec{0}$
2.  $\frac{d[k\vec{u}(t)]}{dt} = k \frac{d\vec{u}(t)}{dt}$
3.  $\frac{d[\vec{u}(t) + \vec{v}(t)]}{dt} = \frac{d\vec{u}(t)}{dt} + \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$
4.  $\frac{d[\mathbf{a}(t)\vec{u}(t)]}{dt} = \mathbf{a}(t) \frac{d\vec{u}(t)}{dt} + \frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} \vec{u}(t)$
5.  $\frac{d[\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t)]}{dt} = \vec{u}(t) \cdot \frac{d\vec{v}(t)}{dt} + \frac{d\vec{u}(t)}{dt} \cdot \vec{v}(t)$
6.  $\frac{d[\vec{u}(t) \times \vec{v}(t)]}{dt} = \vec{u}(t) \times \frac{d\vec{v}(t)}{dt} + \frac{d\vec{u}(t)}{dt} \times \vec{v}(t)$

Como una consecuencia de la regla 5 se obtiene el siguiente resultado:

Si  $\vec{r}(t)$  es una función vectorial con norma constante, es decir  $\|\vec{r}(t)\| = cont$ , entonces

$$\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0.$$

Demostración: Sea  $\vec{r}(t)$  una función vectorial tal que  $\|\vec{r}(t)\| = c$ , con  $c$  un real no negativo. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|\vec{r}(t)\|^2 &= c^2 \\ \therefore \vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t) &= c^2 \\ \therefore \frac{d[\vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t)]}{dt} &= 0 \\ \therefore \vec{r}(t) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} + \vec{r}(t) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} &= 0 \\ \therefore 2\vec{r}(t) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} &= 0 \\ \therefore \vec{r}(t) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

En otras palabras, si la trayectoria  $\vec{r}(t)$  tiene norma constante, el vector de posición  $\vec{r}$  y es vector tangente  $d\vec{r}/dt$  son ortogonales entre sí, para cada valor de  $t$ .

Así, por ejemplo, para el caso de una trayectoria circular

$$\vec{r}(t) = (\cos t)\hat{i} + (\sin t)\hat{j},$$

que siempre presenta norma constante

$$\|\vec{r}(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1,$$

se tiene que

$$\vec{r}(t) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (\cos t \hat{i} + \sin t \hat{j}) \cdot (-\sin t \hat{i} + \cos t \hat{j}) = -\sin t \cos t + \sin t \cos t = 0.$$

#### 4.5 Puntos interiores, exteriores y frontera.

Aquí presentaremos algunas nociones de topología, requeridas para comprender el significado de varios de los teoremas y conceptos que se verán más adelante en el curso.

**Definición.** Dado un punto  $\bar{x}_0 \in \mathfrak{R}^n$  y un número real  $d > 0$  la vecindad  $V_d(\bar{x}_0)$  con centro en  $\bar{x}_0$  y radio  $d$  es el conjunto de todos los puntos  $\bar{x} \in \mathfrak{R}^n$  cuya distancia a  $\bar{x}_0$  es menor que  $d$ , es decir,

$$V_d(\bar{x}_0) = \left\{ \bar{x} \in \mathfrak{R}^n \mid \|\bar{x} - \bar{x}_0\| < d \right\}.$$

Ejemplos:

1. Una vecindad en  $\mathfrak{R}$  es el conjunto  $V_d(x_0) = \{x \in \mathfrak{R} \mid |x - x_0| < d\}$ , que representa un intervalo abierto en los reales:

$$\begin{aligned} & |x - x_0| < d \\ \therefore & -d < x - x_0 < d \\ \therefore & x_0 - d < x < x_0 + d \end{aligned}$$

2. Una vecindad en  $\mathfrak{R}^2$  es el conjunto  $V_d(\bar{x}_0) = \left\{ \bar{x} \in \mathfrak{R}^2 \mid \|\bar{x} - \bar{x}_0\| < d \right\}$ , que representa los puntos dentro de un círculo de radio  $d$  y centro en  $\bar{x}_0$ :

$$\begin{aligned} & \|\bar{x} - \bar{x}_0\| < d \\ \therefore & \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < d \\ \therefore & (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < d^2 \end{aligned}$$

3. Una vecindad en  $\mathfrak{R}^3$  es el conjunto  $V_d(\bar{x}_0) = \left\{ \bar{x} \in \mathfrak{R}^3 \mid \|\bar{x} - \bar{x}_0\| < d \right\}$ , que representa los puntos dentro de una esfera de radio  $d$  y centro en  $\bar{x}_0$ :

$$\begin{aligned} & \|\bar{x} - \bar{x}_0\| < d \\ \therefore & \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < d \\ \therefore & (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < d^2 \end{aligned}$$

Con base en los ejemplos anteriores, es claro por qué una vecindad también se denomina como bola abierta.

**Definición.** Sea  $A \subset \mathfrak{R}^n$  un conjunto y sea  $\bar{x} \in \mathfrak{R}^n$  un punto. Decimos que:

- $\bar{x}$  es un punto interior de  $A$  si existe un número  $d > 0$  tal que la vecindad  $V_d(\bar{x}_0)$  totalmente contenida en  $A$ .
- $\bar{x}$  es un punto exterior de  $A$  si existe un número  $d > 0$  tal que la vecindad  $V_d(\bar{x}_0)$  no contiene puntos de  $A$ .
- $\bar{x}$  es un punto frontera de  $A$  si para todo número  $d > 0$  la vecindad  $V_d(\bar{x}_0)$  contiene tanto puntos de  $A$ , como puntos fuera de  $A$ . Los puntos frontera pueden, o no pertenecer a  $A$ .

Así, si  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  entonces el conjunto de puntos interiores (PI), puntos exteriores (PE) y puntos frontera (PF) de  $A$  son los conjuntos:

$$PI = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

$$PE = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$$

$$PF = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

Veamos otros ejemplos:

1.  $A = \mathbb{R}_+^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0 \text{ y } x_2 \geq 0\}$ .      2.  $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 = 0\}$ .

3.  $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x_1 < 5 \text{ y } 1 \leq x_2 < 3\}$ .      4.  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$ .

5.  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x \leq b, y = 0\}$ .      6.  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x \leq b\}$

#### 4.6 Conjuntos abiertos, cerrados, acotados, compactos, convexos.

**Definición.** Sea  $A \subset \mathfrak{R}^n$ . Se dice que  $A$  es un conjunto abierto si  $A$  está formado exclusivamente por puntos interiores, es decir, si para todo  $\bar{x} \in A$  existe  $V_d(\bar{x})$  tal que  $V_d(\bar{x}) \subset A$ .

En otras palabras, se dice que  $A$  es un conjunto abierto cuando ninguno de sus puntos frontera pertenece a  $A$ .

Ejemplos:

1.  $A = \{x \in \mathfrak{R} \mid 1 < x < 2\}$  es abierto: sus puntos frontera son  $x = 1$  y  $x = 2$ , y ninguno de estos pertenece a  $A$ .

2.  $A = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 \mid 1 < x < 2\}$  es abierto: sus puntos frontera son todos aquellos sobre las rectas  $x = 1$  y  $x = 2$ , y ninguno de estos pertenece a  $A$ .

3.  $A = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 \mid 1 < x < 2, y = 0\}$  no es abierto: todos los puntos de  $A$  son puntos frontera.

4.  $A = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(3,3)\}$  no es abierto:  $A$  contiene un punto frontera, que es el punto  $(3,3)$ .

**Teorema.** Cualquier vecindad  $V_d(\bar{x}_0)$  en  $\mathfrak{R}^n$  es un conjunto abierto.

Ver su demostración en cualquier texto de cálculo en varias variables.

**Teorema.** a) La unión de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.  
b) La intersección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

En relación con el inciso b de este teorema es importante entender por qué se requiere que la intersección sea finita. El siguiente ejemplo ilustra por qué es importante que la intersección sea finita, y no infinita, para que el conjunto resultante sea un conjunto abierto. Considera el conjunto de intervalos  $I_n$  definidos por

$$I_n = \left( -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right),$$

para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Es claro que cada  $I_n$  es un conjunto abierto; sin embargo la intersección de todos los conjuntos  $I_n$  es el conjunto

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_n = \{0\},$$

que no es un conjunto abierto (el único elemento del conjunto es 0, que es un punto frontera).

**Definición.** Sea  $A \subset \mathfrak{R}^n$ . Se dice que  $A$  es un conjunto cerrado si para todo punto que no pertenece a  $A$  es posible encontrar una vecindad que no contenga puntos de  $A$ .

En otras palabras, un conjunto es cerrado si y sólo si contiene a todos sus puntos frontera.

Ejemplos:

1.  $A = \{x \in \mathfrak{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$  es cerrado: sus puntos frontera son  $x = 1$  y  $x = 2$ , y ambos pertenecen a  $A$ .

2.  $A = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 \mid (x-2)^2 + (y-3)^2 \leq 1\}$  es cerrado: sus puntos frontera son todos los puntos de la circunferencia, que pertenecen a  $A$ .

3.  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + (y-3)^2 = 1\}$  es cerrado: todos sus puntos son frontera.

4.  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(3,3)\}$  es cerrado:  $A$  contiene toda su frontera, que consiste en los puntos de la circunferencia, junto con el punto  $(3,3)$ .

5.  $A = \mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0\}$  es cerrado:  $A$  contiene a toda su frontera, que son los ejes coordenados, en su parte no negativa.

6.  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$  es cerrado:  $A$  contiene a toda su frontera, que es el punto  $x = 2$ .

**Teorema.** Un conjunto es cerrado si y sólo su complemento es abierto.

Es importante señalar que existen conjuntos que no son abiertos ni son cerrados, como es el caso de  $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x_1 < 5 \text{ y } 1 \leq x_2 < 3\}$ , ya que éste contiene algunos de sus puntos frontera (de modo que no es abierto), pero no los contiene a todos ellos (de modo que no es cerrado).

Asimismo, existen otros conjuntos que son tanto abiertos como cerrados. Estos son el conjunto vacío y  $\mathfrak{R}^n$ , como será argumentado en clase.

**Teorema.** a) La intersección de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.  
b) La unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

De acuerdo con el inciso b de este teorema, sólo se puede asegurar que la unión de cerrados es un conjunto cerrado cuando el número de estos conjuntos sea finito. El siguiente ejemplo ilustra cómo la intersección infinita de conjunto cerrados puede resultar en un conjunto abierto. Considera el conjunto de intervalos  $I_n$  definidos por

$$I_n = [-n, n],$$

para toda  $n \in \mathbb{N}$ . Es claro que cada  $I_n$  es un conjunto cerrado. La unión de todos ellos es el conjunto

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n = \mathfrak{R},$$

que es un conjunto abierto (el conjunto de los reales no contiene puntos frontera).

**Definición.** Un conjunto  $A \subset \mathfrak{R}^n$  es un conjunto acotado si existe una vecindad con centro en el origen que contiene totalmente a  $A$ , es decir, si existe  $d > 0$  tal que  $A \subset V_d(\vec{0})$ .

En otras palabras, un conjunto es acotado si no contiene puntos arbitrariamente alejados del origen.

Ejemplos:

1.  $A = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 \mid 1 < x < 2, 1 < y < 2\}$  es acotado: cualquier vecindad  $V_d(\vec{0})$  de radio  $d > \sqrt{8}$  contiene totalmente los puntos de  $A$ .

2.  $A = \{x \in \mathfrak{R} \mid 2 < x \leq 3\}$  es acotado: cualquier vecindad  $V_d(0)$  de radio  $d > 3$  contiene totalmente los puntos de  $A$ .

3.  $A = \mathfrak{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$  no es un conjunto acotado, pero sí es cerrado.

Los ejemplos anteriores muestran que un conjunto puede ser, o no, acotado, independientemente de si es abierto, cerrado o ninguno de estos.

**Definición.** Un conjunto  $A \subset \mathfrak{R}^n$  es un conjunto compacto si es cerrado y acotado.

Ejemplos:

1.  $A = \{x \in \mathfrak{R} \mid 2 \leq x \leq 3\}$  es compacto, ya que es cerrado y acotado.
2.  $A = \{x \in \mathfrak{R} \mid 2 \leq x < 3\}$  no es compacto, ya que es acotado, pero no cerrado.
3.  $A = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$  es compacto, ya que es cerrado y acotado.
4.  $A = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2\}$  no es compacto, ya que es cerrado, pero no acotado (la variable  $y$  es libre).

**Definición.** Un conjunto  $A \subset \mathfrak{R}^n$  es un conjunto convexo si para cualquier par de puntos  $\bar{x}, \bar{y} \in A$  el segmento de recta que los une también está en  $A$ , es decir, si

$$t\bar{x} + (1-t)\bar{y} \in A,$$

para toda  $0 < t < 1$ .

En la definición de conjunto convexo, nota que la expresión

$$t\bar{x} + (1-t)\bar{y} = \bar{y} + t(\bar{x} - \bar{y}),$$

conocida como combinación convexa, es la ecuación paramétrica de la recta que contiene al punto  $\bar{y}$  y está en la dirección  $\bar{x} - \bar{y}$ ; al limitar el dominio de  $t$ , entre 0 y 1, se obtiene el segmento de recta entre los puntos  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$ .

Los conjuntos convexos son muy importantes en economía. Por ejemplo, si el conjunto  $A = \{(x_1, x_2) \in \mathfrak{R}_+^2 \mid u(x_1, x_2) \geq u_0\}$  de todas las canastas  $(x_1, x_2)$  que dan una utilidad  $u(x_1, x_2)$  mayor o igual a un valor  $u_0$  es un conjunto convexo, entonces puedes estar seguro de que cualquier canasta intermedia  $\bar{z} = t\bar{x} + (1-t)\bar{y}$  también dará una utilidad mayor o igual a  $u_0$ .

$$u(\bar{x}) \geq u_0 \text{ y } u(\bar{y}) \geq u_0 \Rightarrow u(\bar{z}) \geq u_0$$

Los siguientes ejemplos ilustran la demostración formal de que un conjunto es convexo.

Ejemplos:

1. Demuestra que el conjunto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$  es convexo.

Sean  $\bar{x}_1 = (x_1, y_1), \bar{x}_2 = (x_2, y_2) \in A$ . Por lo tanto,  $x_1 + y_1 = 1$  y  $x_2 + y_2 = 1$ .

Sea  $\bar{z} = t\bar{x}_1 + (1-t)\bar{x}_2$ , con  $0 < t < 1$ , de modo que

$$\begin{aligned}\bar{z} &= t(x_1, y_1) + (1-t)(x_2, y_2) \\ &= (tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2) \\ &= (z_1, z_2).\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}z_1 + z_2 &= tx_1 + (1-t)x_2 + ty_1 + (1-t)y_2 \\ &= t(x_1 + y_1) + (1-t)(x_2 + y_2) \\ &= t(1) + (1-t)(1) = 1,\end{aligned}$$

de modo que  $\bar{z} = (z_1, z_2) \in A$ . Por lo tanto,  $A$  es convexo.

2. Demuestra que el conjunto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b\}$  es convexo.

Sean  $\bar{x}_1 = (x_1, y_1), \bar{x}_2 = (x_2, y_2) \in A$ . Por lo tanto,  $a \leq x_1 \leq b$  y  $a \leq x_2 \leq b$ .

Sea  $\bar{z} = t\bar{x}_1 + (1-t)\bar{x}_2$ , con  $0 < t < 1$ , de modo que

$$\begin{aligned}\bar{z} &= t(x_1, y_1) + (1-t)(x_2, y_2) \\ &= (tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2) \\ &= (z_1, z_2).\end{aligned}$$

Como  $t > 0$  y  $1-t > 0$ , por lo tanto

$$ta \leq tx_1 \leq tb \quad \text{y} \quad (1-t)a \leq (1-t)x_2 \leq (1-t)b.$$

Sumando ambas expresiones tenemos

$$ta + (1-t)a \leq tx_1 + (1-t)x_2 \leq tb + (1-t)b,$$

es decir,

$$a \leq tx_1 + (1-t)x_2 \leq b,$$

y, por lo tanto,

$$a \leq z_1 \leq b.$$

Así,  $\bar{z} = (z_1, z_2) \in A$ , de modo que  $A$  es convexo.

**Teorema.** La intersección de dos conjuntos convexos es un conjunto convexo.

Demostración:

Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos convexos, y sean  $\bar{x}, \bar{y} \in A \cap B$ . Por lo tanto,  $\bar{x}, \bar{y} \in A$  y  $\bar{x}, \bar{y} \in B$ .

Sea  $\bar{z} = t\bar{x} + (1-t)\bar{y}$ , con  $0 < t < 1$ . Como  $\bar{x}, \bar{y} \in A$  y  $A$  es convexo, por lo tanto

$$\bar{z} = t\bar{x} + (1-t)\bar{y} \in A.$$

Como  $\bar{x}, \bar{y} \in B$  y  $B$  es convexo, por lo tanto

$$\bar{z} = t\bar{x} + (1-t)\bar{y} \in B.$$

Por lo tanto,

$$\bar{z} \in A \cap B,$$

de modo que  $A \cap B$  es convexo.