



Solución Clase Auxiliar 12

Movimiento Browniano
14 de Noviembre de 2006

Problema 1

Notar que $(B_t - B_s) \rightarrow N(0, t - s)$. Luego:

$$\begin{aligned} E[(B_t - B_s)^4] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_0^{\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \cdot 3(t-s) \int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}} dx = 2 \cdot 3(t-s)^2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}}}{\sqrt{2\pi(t-s)}} dx = 3(t-s)^2 \end{aligned}$$

(Se integró por partes 2 veces y la última integral que queda es la de una normal de media cero en $[0, \infty]$, que vale $1/2$).

Notar que el resultado es consistente con lo que se pide probar en el problema 3 de la tarea 3.

Se concluye que $\beta = 1$ y $D = 3$ satisfacen la condición del enunciado.

Problema 2, Examen Primavera 2004

1. Claramente, la política que debe seguir Armijo es apretar el botón de pánico cada vez que la temperatura alcance un determinado nivel. Es también claro que este nivel debe ser mayor que 0 y menor que B . En otras palabras Armijo debe estimar un valor para $0 < X < B$ tal que cada vez que la temperatura de la caldera sea de $X[^\circ K]$ Armijo aprete el botón de pánico.
2. Condicionando sobre el valor que toma $Z_h = h\mu + B_h$ donde B_h es un browniano estándar:

$$\begin{aligned} f(x) &= E_{Z_h}[f(x)|Z_h] \\ &= E_{Z_h}[f(x - Z_h) + h + o(h)] \\ &= E_{Z_h}[f(x) - Z_h f'(x) + \frac{1}{2} Z_h^2 f''(x) + h + o(h)] \\ &= f(x) - h\mu f'(x) + \frac{h + h^2 \mu^2}{2} f''(x) + h + o(h) \end{aligned}$$

Reordenando, dividiendo la expresión por h y tomando el límite cuando $h \rightarrow 0$ se obtiene:

$$\mu f'(x) = \frac{1}{2} f''(x) + 1$$

Se puede observar que $f(x)$ debe cumplir la siguiente propiedad:

$$\begin{aligned}
f(x+y) &= E[\text{tiempo hasta alcanzar } x+y \text{ desde } 0] \\
&= E[\text{tiempo hasta alcanzar } x \text{ desde } 0] + E[\text{tiempo hasta alcanzar } x+y \text{ desde } x] \\
&= f(x) + E[\text{tiempo hasta alcanzar } y \text{ desde } 0] \\
&= f(x) + f(y)
\end{aligned}$$

De esta manera, es claro que $f(x)$ debe ser de la forma $f(x) = C \cdot x$. Reemplazando esta expresión en la ecuación diferencial anterior se obtiene:

$$\mu \cdot C = \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 \Rightarrow C = \frac{1}{\mu}$$

De esta forma, el tiempo esperado hasta alcanzar el valor x , partiendo desde 0 es:

$$f(x) = \frac{x}{\mu}$$

3. Recordando teoría de renovación, el costo por unidad de tiempo de esta política corresponde a :

$$C_{NA} = \frac{E[\text{costo ciclo}]}{E[\text{duración ciclo}]} = \frac{M}{\frac{B}{\mu} + \frac{1}{\mu}} = \frac{M\mu}{B+1}$$

Si un ciclo comienza cuando la caldera comienza a funcionar correctamente (o cuando esta falla).

4. De la misma forma que en la pregunta anterior, y definiendo que un ciclo comienza cuando Armijo presiona el botón de pánico (cuando la temperatura alcanza los $x^\circ K$), se obtiene:

$$C_{Ax}(x) = \frac{E[\text{costo ciclo}]}{E[\text{duración ciclo}]} = \frac{C + M\alpha(x)}{\frac{x}{\mu} + \frac{1}{\mu}\alpha(x)} = \frac{\mu(C + M\alpha(x))}{x + \alpha(x)}$$

5. Para encontrar la política óptima se debe obtener el valor \bar{x} tal que:

$$C_{Ax}(\bar{x}) = \min_{0 < x < B} \{C_{Ax}(x)\}$$

Y se debiese seguir la siguiente política:

- Si $C_{NA} \leq C_{Ax}(\bar{x})$ entonces Armijo nunca debe apretar el botón de pánico.
- Si $C_{NA} > C_{Ax}(\bar{x})$ entonces Armijo debe apretar el botón de pánico cuando la temperatura alcance los $\bar{x}^\circ K$.

Problema 3, Control Primavera 2005

Parte A

1. Recordando que para $(A, B > 0)$ la probabilidad de que un Browniano estándar llegue a A antes que a -B es $P_A = \frac{B}{A+B}$, se tiene:

$$\begin{aligned}
E(\$) &= \frac{B}{A+B}(P_0 + A) + \frac{A}{A+B} \left[\frac{B}{A+2B}(-(P_0 - B) + 2(P_0 + A)) + \frac{A+B}{A+2B}(-(P_0 - B) + 2(P_0 - 2B)) \right] \\
&= \frac{P_0(A^2 + 2B^2 + 3AB)}{(A+B)(A+2B)} = P_0
\end{aligned}$$

Este resultado también es justificable mediante argumentos de simetría.

2. Notar que el resultado de la parte anterior no depende de A ni de B . La condición es simplemente que:

$$P_0 = R$$

Parte B

- 1.

$$F_{B_t}[x] = P\left[\frac{B_t}{\sqrt{t}} \leq x\right] = P[B_t \leq x\sqrt{t}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{x\sqrt{t}} e^{-\frac{u^2}{2t}} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{z^2}{2}} \sqrt{t} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{z^2}{2}} du$$

En que hemos usado el cambio de variable $z = \frac{u}{\sqrt{t}}$.

Concluimos que $\frac{B_t}{\sqrt{t}} \rightarrow N(0, 1)$. Luego $B_t\sqrt{t}$ no es Browniano.

2. Notar que para $x, y \geq 0$ se tiene:

$$P(B_t^* \geq x, B_t \leq x - y) = P(B_t > x + y) = P\left(\frac{B_t}{\sqrt{t}} > \frac{x + y}{\sqrt{t}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{x + y}{\sqrt{t}}\right)$$

Si sustituimos en la relación anterior $u = x - y$, $v = x$, para $(u, v) \in D$ se tiene:

$$P(B_t < u, B_t^* \geq v) = 1 - \Phi\left(\frac{2v - u}{\sqrt{t}}\right) = \Phi\left(\frac{u - 2v}{\sqrt{t}}\right)$$

Por último, se concluye:

$$P(B_t < u, B_t^* < v) = P(B_t < u) - P(B_t < u, B_t^* \geq v) = \Phi\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{u - 2v}{\sqrt{t}}\right) \quad \forall (u, v) \in D$$

3. Una alternativa es obtener la densidad conjunta de B_t y B_t^* del resultado anterior, derivando una vez c/r a v y otra c/r a u . Se tiene que:

$$f_{(B_t, B_t^*)}(u, v) = \frac{2(2v - u)}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{(2v - u)^2}{2t}} \quad \forall (u, v) \in D$$

Luego, se puede integrar en todo el dominio de u el resultado anterior para obtener la distribución marginal de B_t^* y comparar este resultado con la distribución de $P(|B_t| \geq x)$, que es fácilmente computable, y ver que son iguales.

Otra alternativa es notar que se cumplen las 2 siguientes relaciones:

$$(1) \quad P(B_t^* \geq x, B_t \leq x) = P(B_t > x)$$

$$(2) \quad P(B_t^* \geq x, B_t > x) = P(B_t > x)$$

Sumando (1) y (2) se tiene:

$$P(B_t^* \geq x, B_t \leq x) + P(B_t^* \geq x, B_t > x) = 2P(B_t > x)$$

El término de la izquierda es simplemente $P(B_t^* \geq x)$. Y por simetría, el término de la izquierda es $P(|B_t| \geq x)$. Por lo que se tiene la relación pedida:

$$P(B_t^* \geq x) = P(|B_t| \geq x) \quad \forall x \geq 0$$

4. Primero notemos que

$$P(|B_t| > x) = P\left(\frac{|B_t|}{\sqrt{t}} > \frac{x}{\sqrt{t}}\right) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\right)$$

Luego, de la parte 3 se concluye:

$$P(B_t^* \leq x) = 1 - P(B_t^* > x) = 1 - P(|B_t| > x) = 2\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - 1$$

5. Notar que dada la propiedad de incrementos independientes del Browniano, a partir del instante T (cuando King parte la observación), la evolución futura del precio es también Browniana y lo único relevante de lo que ha pasado anteriormente es que el origen ahora está en $(P_0 + A)$.
Adicionalmente, tomando esperanza de B_t^* de acuerdo a lo encontrado en la pregunta anterior, se tiene:

$$E(B_t^*) = \sqrt{\frac{2t}{\pi}}$$

Luego, el valor esperado del máximo precio que ve King en el intervalo $[T, 2T]$ es:

$$E(P_0 + A + B_{(2T-T)}^*) = P_0 + A + \sqrt{\frac{2T}{\pi}}$$

6. Es fácil notar la siguiente relación entre eventos:

$$(\tau_a > t) \iff (B_t^* < a)$$

Usando la parte 4, se tiene entonces:

$$P(\tau_a \leq t) = 1 - P(\tau_a > t) = 1 - \left(2\Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right) - 1\right)$$

Derivando lo anterior c/r a t se llega a lo pedido:

$$f_{\tau_a}(t) = \frac{a}{t^{3/2}} \phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right) \quad \forall t > 0$$

Para concluir, notar que $\phi(x) \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Luego:

$$P(\tau_a \geq t) = \int_t^\infty \frac{a}{s^{3/2}} \phi\left(\frac{a}{\sqrt{s}}\right) ds \leq \int_t^\infty \frac{a}{s^{3/2}} \cdot \frac{1}{2} ds = \frac{a}{\sqrt{t}} \quad \forall a, t > 0$$