



Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN790: Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería
Profesor: Raúl Gouet
Auxiliar: Mario Guajardo, Daniel Yung

Tarea 3

Entrega: Lunes 20 de Noviembre de 2006

MOVIMIENTO BROWNIANO Y TEORÍA DE ESPERA

Entregar separadamente preguntas 1 a la 3 y preguntas 4 a la 6

Problema 1

Calcule el valor de

$$\int_0^t B_s dB_s$$

Para esto, divida el intervalo de integración en N periodos de igual largo y aproxime la expresión anterior mediante una suma, considerando un valor “adecuado” para aproximar el valor de la función dentro de cada intervalo.

Muestre que la expresión obtenida depende de la aproximación realizada, inclusive cuando $N \rightarrow \infty$.

Problema 2

Considere un proceso $x(t)$ tal que:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz,$$

en que dz es el incremento de un movimiento browniano y $a(x, t)$ y $b(x, t)$ son funciones conocidas (no aleatorias).¹

1. Sea $F(x, t)$ una función diferenciable al menos dos veces en x y una en t . Muestre que:

$$dF = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2(x, t) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right] dt + b(x, t) \frac{\partial F}{\partial x} dz$$

Hint: Expandir dF en una serie y notar que parte de $(dx)^2$ NO es despreciable para la variación infinitesimal dt .

2. Considere $a(x, t) = \alpha x$; $b(x, t) = \sigma x$; $F(x) = \ln(x)$. Muestre que para cualquier intervalo finito de tiempo de largo T ,
 $dF \rightarrow N((\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)T, \sigma^2 T)$

Problema 3

Sea B_t un movimiento Browniano estándar.

1. Pruebe que

$$E[e^{cB_t}] = \exp\left(-\frac{1}{2}c^2t\right) \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

¹El proceso $x(t)$, generalización de un browniano, es llamado proceso de Ito.

- Utilizando una expansión de serie para la función exponencial, argumente que

$$E[B_t^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k k!} t^k \quad k \in \mathbb{N}$$

- Dado que

$$E[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\frac{x^2}{2t}} dx$$

Utilice la función $f(x) = x^{2k}$, inducción matemática e integración por partes para corroborar los resultados de la parte anterior.

Problema 4

Considere un movimiento Browniano con barreras reflectantes en A y $-B$, con $A > 0$ y $B > 0$. Sea $p_t(x)$ la densidad de X_t .

- Encuentre una ecuación diferencial para $p_t(x)$.
- Obtenga $p(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} p_t(x)$.

Problema 5

La llegada de clientes a un banco sigue un proceso de poisson de tasa λ . Una vez dentro del banco los clientes se encuentran frente a dos sistemas M/M/1, y deben elegir a que cola colocarse. Lógicamente los clientes siempre escogerán la cola que tenga el menor largo y ante empates elegirán equiprobabilísticamente.

Adicionalmente, una vez que eligen la cola a la que se colocan no pueden cambiar su elección. Suponga que los tiempos de atención son iguales en ambos sistemas, y exponencialmente distribuidos de media $\frac{1}{\mu}$.

- Modele el número de personas en cada cola como una cadena de Markov en tiempo continuo. Explícite claramente todas las transiciones posibles indicando las tasas respectivas, ¿Cuál es la condición de estacionariedad?
- Escriba las ecuaciones que le permitieran encontrar la distribución de probabilidades estacionarias.
- Encuentre la fracción del tiempo que la cola 1 se encuentra sin clientes. HINT : Escriba una ecuación diferencial para el número esperado de personas en el sistema y razone por simetría.
- Compare la eficiencia de este sistema con la modalidad de "cola única".
- ¿Qué modificaciones realizaría al modelo si permitiese que los clientes que ya ingresaron al sistema pudiesen cambiarse de cola ante diferencias en el largo de estas?. Explique claramente sus supuestos, ¿Cómo se compara este sistema con un M/M/2?

Problema 6

Un servicio que emite certificados de sanidad funciona de la forma que se describe a continuación.

Los interesados en el certificado llegan a la oficina de certificados según un proceso de Poisson de tasa λ [personas/hora].

Las personas que ingresan al servicio son atendidas por un burócrata. Con probabilidad q , e independiente de todo lo demás, el burócrata otorga el documento sin pedir más documentación, con lo que los beneficiados se retiran felices del servicio. El tiempo de atención del burócrata se comporta como una variable aleatoria exponencial de parámetro μ_B .

Las personas que no consiguen el certificado (con probabilidad $(1 - q)$), deben dirigirse a un consultorio donde se les realizará una serie de análisis.

Todas las personas que llegan al consultorio deben pasar por el mesón donde son atendidos por **una** simpática recepcionista que, en tiempo distribuido como una v.a. exponencial de parámetro μ_M , decide si deben realizar primero un test psicológico (con probabilidad p) o si pasan directamente al laboratorio médico.

El test psicológico demora un tiempo distribuido como una v.a. exponencial de parámetro μ_P y es realizado por **un** solo especialista. Luego del test todas las personas se dirigen al laboratorio médico.

En el laboratorio médico atienden **dos** doctores, atienden a los pacientes, que esperan formando una única fila. El tiempo de atención de cada doctor puede ser representado como una v.a. exponencial de parámetro μ_D . Una vez terminada la visita al laboratorio médico cada persona regresa a la oficina del burócrata con la esperanza que esta vez les entregue el certificado.

El burócrata los recibe y nuevamente decide, como en el caso de las personas que llega a su oficina por primera vez, en tiempo distribuido como una v.a. exponencial de parámetro μ_B , si les entrega el certificado (con probabilidad q) o si los manda de nuevo al consultorio (prob $(1 - q)$).

1. (2,0 pts.) Modele el servicio descrito como una red de colas.
2. (1,5 pts.) Calcule las tasas efectivas de entrada a cada sistema y escriba las condiciones de estado estacionario.
3. (1,0 pts.) Calcule el número promedio de usuarios dentro del sistema completo en estado estacionario.
4. (1,5 pts.) Calcule el tiempo promedio que pasa un usuario dentro del sistema en estado estacionario.