



Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN790: Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería
Profesor : Raúl Gouet
Auxiliares : Mario Guajardo, Daniel Yung

TAREA 1

FECHA DE ENTREGA: 6 de Septiembre de 2006 antes del control
Entregar por separado Preguntas 1 a la 3 y Preguntas 4 a la 6.
La tarea debe ser entregada individualmente.

Problema 1

Un proceso de Poisson bi-dimensional es aquel cuyos eventos se pertenecen a \mathbb{R}^2 tal que:

- Para cualquier región del plano de área A el número de eventos en A se distribuye según un proceso de Poisson de tasa $\lambda \cdot A$.
- El número de eventos en regiones disjuntas son independientes.

Considere un punto fijo r . Sea X la distancia entre r y el evento más cercano (utilizando norma euclidiana). Demuestre que:

1. $P[X > t] = e^{-\lambda \pi t^2}$
2. $E[X] = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}$
3. Sea R_i , la distancia desde un punto arbitrario hasta el i -ésimo evento más cercano a él ($R_0 = 0$). Muestre que: $\pi R_i^2 - \pi R_{i-1}^2$ ($i \leq 1$) son variables aleatorias independientes exponencialmente distribuidas de tasa λ .

Problema 2

1. Suponga que *shocks* ocurren de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ y suponga que cada *shock*, independiente de lo demás, causa la falla de un sistema con probabilidad p . Sea N el número de *shocks* que ocurren hasta que el sistema falla y sea T el tiempo al que falla. Encuentre $P\{N = n/T = t\}$.
2. El número de pruebas a realizar en un laboratorio es una v.a. Poisson de media λ . Cada prueba tiene n resultados posibles; independiente de todo lo demás, el resultado de una prueba es i con probabilidad P_i , $\sum_1^n P_i = 1$. Denotemos por X_j al número de resultados que ocurren exactamente j veces, $j = 0, 1, \dots$. Entregue expresiones para $E[X_j]$ y $Var(X_j)$.
3. Denotemos por T_1, T_2, \dots a los tiempos entre arribos de eventos de un proceso de Poisson no homogéneo de función de intensidad $\lambda(t)$.
 - ¿Son independientes las variables T_i ?
 - ¿Son las variables T_i idénticamente distribuidas?
 - Encuentre la distribución de T_1 .
 - Encuentre la distribución de T_2 .
 - Si $\lambda(t) = \phi$, $\forall t \geq 0$ ¿Cuál es la distribución de T_1 y T_2 ? ¿Cuál es su distribución conjunta?

Problema 3

La vida útil de un automóvil es una variable aleatoria de distribución F . Un individuo tiene la política de cambiar su auto por uno nuevo cuando éste falla o cuando llega a una edad A . Sea $R(A)$ el valor de reventa de un auto de edad A , mientras que el valor de un auto que ha fallado es 0 independiente de su edad. Sea C_1 el costo de un auto nuevo y suponga que se debe incurrir en un costo adicional de C_2 si el auto se cambia porque falla.

1. Si un ciclo comienza cada vez que el individuo compra un auto nuevo, calcule el costo promedio por unidad de tiempo en el largo plazo.
2. Si el ciclo se define de manera que comienza cuando el auto en uso falla, calcule el costo promedio por unidad de tiempo en el largo plazo.

Problema 4

Considere sucesivos lanzamientos de una moneda que tiene probabilidad p de salir cara. Encuentre el número esperado de lanzamientos hasta que los siguientes patrones aparecen (C= cara, S= sello) :

1. A= CSCS
2. B= SCSS

Ahora suponga $p = \frac{1}{2}$.

1. Encuentre $P[A \text{ ocurra antes que } B]$.
2. Encuentre el número esperado de lanzamientos de hasta que ocurre A o B.

Problema 5

Un sistema de producción está conformado por 2 máquinas funcionando en serie. Cada una de estas máquinas trabaja sin fallar durante un tiempo exponencialmente distribuido de media λ . Una máquina que falla es reparada en un tiempo aleatorio exponencialmente distribuido de tasa μ . En estos casos, el sistema completo deja de funcionar, a pesar que la máquina que no ha fallado sigue trabajando porque los costos de setup son muy altos.

Suponiendo que ambas máquinas comienzan trabajando correctamente conteste las siguientes preguntas:

1. Calcule la esperanza del tiempo en que el sistema completo está funcionando, antes de la primera falla.
2. Calcule la esperanza del tiempo que el sistema demora en volver a funcionar correctamente.
3. Utilizando los resultados anteriores, calcule la probabilidad de encontrar al sistema en correcto funcionamiento en el largo plazo, definiendo un proceso de renovación alternante.

Suponga ahora que el tiempo que las máquinas funcionan correctamente sigue una distribución F_b , mientras que el tiempo que toma su reparación sigue una distribución F_m .

4. ¿Es válido utilizar un razonamiento análogo a lo realizado en el punto (3)? Justifique.
5. Calcule la probabilidad de encontrar al sistema en correcto funcionamiento en el largo plazo.

Problema 6

A un aeropuerto llegan pasajeros a la zona de embarque según un proceso de Poisson no homogéneo de tasa $\lambda(t)$. Se sabe que los pasajeros pueden ser de dos tipos: *sospechosos* o *con buena presencia*. Cada pasajero tiene una probabilidad q_s de ser de tipo *sospechoso*, y una probabilidad $q_n = 1 - q_s$ de tener buena presencia.

La seguridad de la línea aérea ha dispuesto que una fracción de los pasajeros *sospechosos* y de los que tienen *buena presencia* tengan que someterse a una revisión para detectar eventuales terroristas. La selección de los pasajeros para este control es tal que con probabilidad $R_s(t)$ un pasajero de tipo *sospechoso* que llega en el momento t deberá someterse a la revisión, mientras que si es de tipo *buena presencia* esta probabilidad es $R_n(t)$.

La revisión de los pasajeros es instantánea, incurriéndose en un costo C por cada pasajero controlado. Además, se sabe que con seguridad el sistema de control detectará a un terrorista intentando abordar el avión, los que serán entregados a la justicia. Estudios de la CIA han determinado que una fracción B_s de los pasajeros que parecen *sospechosos* son terroristas, mientras que una fracción B_n de los pasajeros *con buena presencia* también son terroristas ($B_s > B_n$).

Los pasajeros aceptados en el control y aquellos que no tuvieron que someterse a revisión ingresan al salón VIP donde deben esperar hasta que salga el vuelo. El avión despegue en un tiempo T con a lo más N pasajeros. La línea aérea incurre en un costo p por cada unidad de tiempo que un pasajero espera en el salón VIP por concepto de bebidas y entretenimientos, además de un costo D por cada pasajero que estando en el salón VIP para abordar el vuelo no puede hacerlo por falta de espacio, en este caso, los pasajeros tienen todos la misma probabilidad de no poder abordar independiente del orden en que llegaron.

Por otra parte, la compañía sabe que si en el avión van k terroristas hay una probabilidad A_k que los terroristas secuestren la aeronave, lo que significa un costo en imagen valorado en X con $X \gg C$.

1. Encuentre la distribución del proceso de llegadas al salón VIP.
2. Calcule el costo esperado por concepto de bebidas y entretenimientos en el salón VIP.
3. Encuentre la distribución de probabilidad del número de terroristas detectados en el control. ¿Cuál es la distribución de probabilidad de los que están esperando en el salón VIP en el tiempo T ?
4. Encuentre la distribución de probabilidad del número de terroristas que finalmente abordan a un vuelo.
5. Calcule el costo esperado total que deberá incurrir la línea aérea en un vuelo.