

IN-780. Equilibrio general. 2005

Jorge Rivera *

September 11, 2006

Contents

1	Introducción	2
2	Modelo de intercambio	3
2.1	El modelo	3
2.2	Los precios y la restricción presupuestaria	4
2.3	La demanda en un modelo de intercambio	9
2.4	El equilibrio en el modelo de intercambio	13
2.5	La caja de Edgeworth	18
2.6	Optimalidad y teoremas de bienestar en el modelo de intercambio	21
2.7	El núcleo de la economía	29
3	Economía con producción	32
3.1	Problema de la firma	35
3.2	Modelo de economía de propiedad privada	42
3.3	Problema del consumidor revisado	43
3.4	Noción y existencia de equilibrio	44
4	Fallas de mercado	48
4.1	Externalidades	49
4.2	Bienes públicos y equilibrio de Lindahl	56
5	Ejercicios propuestos	60

*Departamento de Economía, Universidad de Chile, Diagonal Paraguay 257, Torre 26, Of. 1502, Santiago, Chile.
email: jrivera@econ.uchile.cl

1 Introducción

Desde un punto de vista formal, el estudio del equilibrio general en economía trata el problema de la existencia de precios y distribuciones de bienes que cumplan *ciertos objetivos fijados a priori* respecto de los agentes de la economía (consumidores y productores). Estos *objetivos* pueden ser de variada índole y normalmente vienen de alguna definición de comportamiento individual de agentes, considerando además la existencia de restricciones globales sobre las decisiones de los mismos. Ya más en detalle, la idea es estudiar la existencia y propiedades de ciertas cantidades (precios, consumos y producciones) que serán las soluciones de ciertos problemas de optimización para cada agente. El punto central es que, normalmente para los diversos modelos que existen, estas soluciones encontradas deben satisfacer dos tipos de criterios centrales: por un lado uno de tipo *simultaneidad* y, por otro lado, uno de *balance económico*. El criterio de simultaneidad se refiere a que el concepto de equilibrio que normalmente se define lleva implícitas variables que deben ser comunes a todos los individuos participantes de la economía (precios) mientras que el de balance se refiere a que los equilibrios debían cumplir con ciertas ecuaciones de conservación¹.

El concepto de equilibrio económico más ampliamente utilizado en la literatura (y más conocido) es el **Walrasiano**. En este concepto, por un lado se asumen comportamientos hedonistas de los consumidores y, para efectos de las firmas, se asumen comportamientos de lucro económico. La idea es que sólo a través del consumo de bienes los individuos logran su felicidad mientras que por el lado de las firmas, es el lucro (ganancia) de la transacción lo que motiva la producción. La **única** restricción que se impone en este modelo es que *lo consumido más lo producido debe ser igual a lo que existe inicialmente en la economía* (digamos, recursos naturales o dotaciones de los individuos). Esta es la llamada ley de Walras. La existencia del equilibrio es, por tanto, la existencia de precios y distribuciones de bienes que sean compatibles con los objetivos antes indicados. El precio obviamente debe ser común a cada individuo y es a través de este que existiría un *flujo* de bienes que llevaría a cada uno de los participantes a un estadio superior de bienestar. De esta manera, el rol del precio en economía es fundamental. Es a través de esta cantidad que el sistema resume sus valoraciones subjetivas de los bienes y con ellos es que también se transforman las cosas en unidades equivalentes que puedan servir para transar (esta es la riqueza de los individuos, que no es otra cosa que la valoración de los activos de un individuo a los precios de mercado).

Es tan complejo el mecanismo de la creación de los precios que hoy en día no existe una teoría razonable y satisfactoria para explicarlo: no sólo es un problema económico, es además un problema sociológico y psicológico de gran envergadura.

No está demás decir que el concepto de equilibrio ya indicado no es el único que podemos imaginar razonablemente. De hecho, el supuesto de hedonismo es en muchos casos muy poco realista ya que, para la mayoría de nosotros, se tiene que la felicidad de otros es una variable de decisión muy importante a la hora de sacar las cuentas: es el bienestar de los hijos o seres queridos lo que muchas veces nos obliga a sacrificar nuestro propio consumo. Es en este caso que se habla de la existencia de externalidades en la economía.

Para efectos del estudio del equilibrio general en economía, **tres** son los problemas centrales que ocupan la agenda de investigación y análisis. En *primer lugar*, la **existencia** del concepto de equilibrio que se defina en el contexto económico considerado. En este sentido, para estudiar este problema se da un juego natural entre supuestos que se asumen sobre la economía y profundidad de los resultados obtenidos. Normalmente, la convexidad (o cóncavidad) ha tenido un rol básico en este análisis.

Un **segundo problema** del cual se preocupa la teoría del equilibrio general dice relación con las **propiedades de eficiencia** asociados al equilibrio. En este sentido hay dos conceptos básicos que persiguen darnos luces sobre la temática del bienestar y/o la *racionalidad* de las distribuciones: la

¹Nada se crea o se destruye, sólo se transforma.

Paretianidad de la asignación y el concepto de **núcleo** en la economía. Intuitivamente, el concepto de Paretianidad trata de modelar la *eficiencia* de las asignaciones en el sentido de evitar el desperdicio de bienes. La idea de núcleo se relaciona con que las asignaciones de equilibrio puedan o no ser robustas ante la existencia de coaliciones de individuos que puedan o no sacar provecho cambiando las asignaciones que se han obtenido. Sobre este último punto no se discute en el presente documento.

Finalmente, un **tercer** (e importante) **problema** a tratar viene de estudiar si dadas ciertas *distribuciones eficientes* de bienes será o no posible encontrar precios tales que las conviertan en equilibrios de la economía. En otras palabras, la problemática de descentralizar puntos eficientes de la economía (óptimos de Pareto). Este es un problema fundamental en economía, sobre el cual existen muchos trabajos.

En lo que sigue, no estudiaremos el modelo de equilibrio general en toda su extensión, sino que más bien aquel denominado *modelo de intercambio*, y más específicamente, el modelo de intercambio con dos agentes y dos bienes.

2 Modelo de intercambio

El modelo de intercambio es el más simple que podemos concebir. No por ello deja de ser interesante, ya que, informalmente, toda la riqueza del análisis del equilibrio está precisamente en este modelo. La idea es formalizar una economía de trueque.

2.1 El modelo

Supongamos que en la economía hay m personas (consumidores), indexadas por $i \in I = \{1, 2, \dots, m\}$. Asumiremos además que en la economía hay $\ell > 0$ bienes y que cada uno de los individuos es poseedor de ciertas *dotaciones iniciales* de bienes dadas por un vector $\omega_i = (\omega_{i1}, \omega_{i2}, \dots, \omega_{i\ell}) \in \mathbb{R}_+^\ell$. La cantidad total de bienes que hay en la economía es, por tanto,

$$\omega = \sum_{i \in I} \omega_i \in \mathbb{R}_{++}^\ell.$$

Las dotaciones iniciales pueden ser herencias, regalos, etc. En definitiva, conforman todos aquellos bienes que definen lo que el individuo posee en la vida. Obviamente se debe asumir que $\omega \in \mathbb{R}_{++}^\ell$ ya que de tener componentes cero simplemente ese bien puede ser ignorado del análisis. Note que asumir $\omega \in \mathbb{R}_{++}^\ell$ no implica que cada ω_i tenga componentes estrictamente positivas.

Supondremos que las preferencias de cada individuo son representadas por una función de utilidad

$$u_i : \mathbb{R}_+^\ell \rightarrow \mathbb{R}$$

de tal forma que dadas dos canastas $x, y \in \mathbb{R}_+^\ell$, diremos que y es preferido a x si y sólo si

$$u_i(x) \leq u_i(y).$$

Más aun, si ocurre que $u_i(x) < u_i(y)$ diremos que y es estrictamente preferido a x .

Nota 2.1 Note que si u_i representa la utilidad de un individuo $i \in I$, entonces cualquier transformación creciente de la misma también representa el ordenamiento del individuo. En efecto, si $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función estrictamente creciente, entonces $u_i(x) \leq u_i(y)$ siempre y cuando $\psi(u_i(x)) \leq \psi(u_i(y))$, por lo cual $\psi \circ u_i$ es también una función de utilidad del individuo.

A partir de todo lo anterior, una economía de intercambio es simplemente una colección

$$\mathcal{E} = (u_i, \omega_i, \mathbb{R}_+^\ell)_{i \in I},$$

donde \mathbb{R}_+^ℓ indica el espacio donde los consumidores pueden escoger sus consumos (espacio de consumos admisibles).

2.2 Los precios y la restricción presupuestaria

Más allá del significado o interpretación que puedan tener, en todo este análisis no entraremos en detalles sobre la formación, origen, relevancia y/o significado de los “precios”. Asumiremos una concepción intuitiva de los mismos.

Como veremos, el rol esencial de los precios está en convertir los distintos bienes en una unidad equivalente, que llamaremos *riqueza*, la que se puede transar en el mercado. Es a través de los precios que podremos definir el intercambio entre los individuos.

Puesto que en todo este análisis tratamos con bienes y no con males, asumiremos entonces que los precios son valores positivos (o iguales a cero). Genéricamente un vector de precios es entonces un elemento de \mathbb{R}_+^ℓ . Así, dado un precio $p = (p_k) \in \mathbb{R}_+^\ell$ y dada una canasta de consumo $x = (x_k) \in \mathbb{R}_+^\ell$, definimos su **valor** como

$$p \cdot x = \sum_{k=1}^m p_k x_k.$$

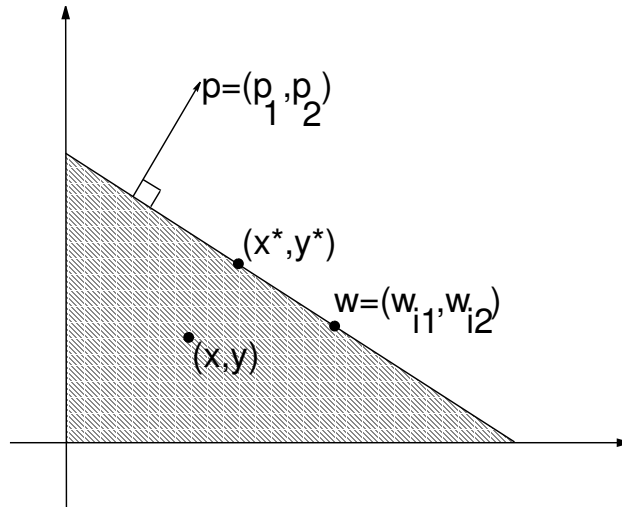
A partir de lo anterior entonces, definimos la riqueza de un individuo $i \in I$ al precio $p \in \mathbb{R}_+^\ell$ simplemente como el valor de sus dotaciones iniciales, es decir,

$$p \cdot \omega_i.$$

Con esto entonces, dado un precio p , uno define el **conjunto presupuestario** de un individuo $i \in I$ simplemente como odas aquellas canastas que cuyo valor es menor o igual a la riqueza del individuo a dicho precio. Si lo denotamos por $B(p, \omega_i)$ se tiene entonces que

$$B(p, \omega_i) = \{x \in \mathbb{R}_+^\ell \mid p \cdot x \leq p \cdot \omega_i\}.$$

Gráficamente el conjunto presupuestario es como sigue ($\ell = 2$):



En la figura anterior se ilustra un conjunto presupuestario asumiendo que el precio de mercado es $p = (p_1, p_2)$ y las dotaciones de un individuo son $\omega_i = (\omega_{i1}, \omega_{i2})$. Que la canasta (x, y) esté en el conjunto presupuestario significa que el individuo correspondiente “lo puede comprar”. Dicho vector puede estar en el **interior** del conjunto presupuestario ((x, y) en la figura) o en la frontera del mismo. Que esté en la frontera implica a su vez que o bien alguna de sus componentes es cero (y por lo tanto el punto está en alguno de los ejes) o bien esté en la llamada **recta presupuestaria** del mismo, cual es el caso de (x^*, y^*) de la figura anterior.

La **recta presupuestaria** de $B(p, \omega_i)$ está formada por todos aquellos puntos que satisfacen la ecuación

$$R = \{x = (x_k) \in \mathbb{R}_+^\ell \mid p \cdot x = p \cdot \omega_i\}.$$

Note que las dotaciones iniciales de un individuo **siempre** está en la recta presupuestaria, cualquiera que sea el precio considerado.

Proposición 2.1 *Dados $p \in \mathbb{R}_+^\ell$ y $\lambda > 0$, se tiene que*

$$B(\lambda p, \omega_i) = B(p, \omega_i).$$

Prueba. La demostración es muy simple. Supongamos que $x \in B(p, \omega_i)$, entonces $p \cdot x \leq p \cdot \omega_i$. Luego, multiplicando toda la desigualdad por $\lambda > 0$ se tiene que

$$(\lambda p) \cdot x \leq (\lambda p) \cdot \omega_i,$$

es decir, que el individuo puede comprar dicha canasta si los precios fueran λp , con lo cual $x \in B(\lambda p, \omega_i)$. La recíproca es obvia: si

$$(\lambda p) \cdot x \leq (\lambda p) \cdot \omega_i$$

al simplificar por λ se obtiene lo indicado. □

Lo anterior se expresa diciendo que el conjunto presupuestario es homogéneo de grado cero en los precios. A partir de este hecho, la consecuencia directa es que los precios se pueden **normalizar** según convenga al contexto que tratemos, cuestión que no altera el conjunto presupuestario en sí. De esta manera, sin pérdida de generalidad, se puede suponer, por ejemplo, que uno de los precios de la economía es uno (digamos, $p_1 = 1$) y los otros son arbitrarios. Al bien que se le asigna precio uno se le denomina **numerario**. Otra forma de “normalizar” los precios es dividir por la suma de sus componentes. Dado $p \in \mathbb{R}_+^\ell$, obviamente con $p \neq 0_{\mathbb{R}^\ell}$, definiendo

$$\delta = \sum_{k=1}^{\ell} p_k > 0,$$

podemos entonces definir el precio normalizado como

$$\hat{p} = (\hat{p}_k) = \frac{1}{\delta} p.$$

Notemos entonces que para todo $k \in L \equiv \{1, 2, \dots, \ell\}$, $\hat{p}_k \geq 0$. Además, de la definición, es directo que

$$\sum_{k=1}^{\ell} \hat{p}_k = 1.$$

De lo anterior entonces, podemos asumir que los precios son elementos del llamado **Simplex** de \mathbb{R}^ℓ , es decir, del conjunto

$$\Delta_\ell = \left\{ \sigma = (\sigma_k) \in \mathbb{R}^\ell \mid \sigma_k \geq 0, \sum_{k=1}^{\ell} \sigma_k = 1 \right\}.$$

Proposición 2.2

(a) El interior y la frontera² del Simplex son

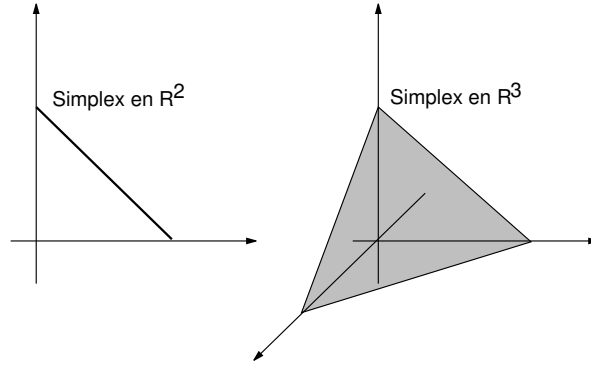
$$\text{int}\Delta_\ell = \{p = (p_k) \in \Delta_\ell \mid p_k > 0, \forall k \in L\}$$

$$\text{fr}\Delta_\ell = \{p = (p_k) \in \Delta_\ell \mid \exists k \in L, p_k = 0\}.$$

(b) El Simplex es un subconjunto compacto y convexo de \mathbb{R}^ℓ .

Prueba. Ejercicio. □

Geométricamente, el simplex de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 se ilustra en la siguiente figura:



Proposición 2.3

(a) Para cualquier $p \in \Delta_\ell$, $B(p, \omega_i)$ es un conjunto convexo y cerrado.

(b) $B(p, \omega_i)$ es compacto si y sólo si $p \in \text{int}\Delta_\ell$.

(c) Si $p \cdot \omega_i > 0$, entonces $B(p, \omega_i)$ tiene interior no vacío. Si este es el caso, $\text{int}B(p, \omega_i) = \{x \in B(p, \omega_i) \mid 0 <_\ell x, p \cdot x < p \cdot \omega_i\}$.

Prueba.

a.- Que sea convexo es inmediato: dados $x, x' \in B(p, \omega_i)$ y dado $\lambda \in [0, 1]$, se tiene que $p \cdot (\lambda x + (1 - \lambda)x') = \lambda p \cdot x + (1 - \lambda)p \cdot x' \leq \lambda p \cdot \omega_i + (1 - \lambda)p \cdot \omega_i = p \cdot \omega_i$, con lo cual $\lambda x + (1 - \lambda)x' \in B(p, \omega_i)$. Para ver la cerradura, consideremos una secuencia $x_n \in B(p, \omega_i)$, tal que $x_n \rightarrow x$. Entonces $p \cdot x_n \leq p \cdot \omega_i$. Luego, $p \cdot x \leq p \cdot \omega_i$ con lo cual $x \in B(p, \omega_i)$, es decir, $B(p, \omega_i)$ es cerrado.

²Recordemos que dado $A \subseteq \mathbb{R}^\ell$, un punto $a \in A$ es interior al conjunto si existe $\epsilon > 0$ tal que $\mathbf{B}(a, \epsilon) \subseteq A$, siendo $\mathbf{B}(a, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^\ell \mid \|x - a\| < \epsilon\}$: bola abierta de centro a y radio $\epsilon > 0$. El interior de A es el conjunto de todos los puntos interiores. Por otro lado, la frontera de A corresponde a la diferencia (de conjuntos) entre la clausura de A y su interior, donde la clausura es el conjunto de todos los puntos de acumulación de elementos de A , que equivalentemente corresponde al menor cerrado que contiene a A .

- b.- Recordemos que un conjunto es compacto si y sólo si es cerrado y acotado. De la parte anterior, sabemos que $B(p, \omega_i)$ es cerrado. Resta ver entonces que bajo la hipótesis indicada es acotado. En efecto, supongamos que existe una sucesión $x_n \in B(p, \omega_i)$ que no es acotada³. Luego, existe al menos una componente $x_{nk} \in \mathbb{R}$, $k \in L$, que converge a infinito. Dado esto, del hecho que

$$p \cdot x_n = p_k x_{nk} + \sum_{j \in L \setminus \{k\}} p_j x_{nj} \geq p_k x_{nk} \geq 0$$

se tiene que $p \cdot x_n \rightarrow \infty$ pues $p_k x_{nk} \rightarrow \infty$ dado que todas las componentes de p son estrictamente positivas. Lo anterior no es posible ya que $p \cdot x_n$ es acotado superiormente por $p \cdot \omega_i$. Finalmente, si $p \in fr\Delta$, se tiene que al menos una de sus componentes es cero, digamos, $p_1 = 0$. Si la componente $j = 1, 2, \dots, \ell$ del vector ω_i es denotada como ω_{ij} , se deduce que para todo $x \geq 0$ el vector $(x, \omega_{i2}, \omega_{i3}, \dots, \omega_{i\ell}) \in B(p, \omega_i)$, con lo cual el conjunto presupuestario no es compacto.

- c.- Sean $p \in \Delta$ y $\omega_i \in \mathbb{R}_+^\ell$ tales que $\delta = p \cdot \omega_i > 0$. Dado $\bar{\omega}_i = \frac{\omega_i}{2}$, es obvio que $p \cdot \bar{\omega}_i = \delta/2 > 0$. Probemos entonces que existe $\epsilon > 0$ tal que⁴ $\mathbf{B}(\bar{\omega}_i, \epsilon) \subseteq B(p, \omega_i)$. En efecto, dado $x \in \mathbf{B}(\bar{\omega}_i, \epsilon)$, existe $h \in \mathbf{B}(0, \epsilon)$ tal que $x = \bar{\omega}_i + h$. En consecuencia,

$$p \cdot x = p \cdot (\bar{\omega}_i + h) = p \cdot \bar{\omega}_i + p \cdot h \leq p \cdot \bar{\omega}_i + \|p\| \cdot \|h\| \leq p \cdot \bar{\omega}_i + \epsilon$$

pues $\|p\| \leq 1$. Tomando $\epsilon = \frac{\delta}{2} = p \cdot \bar{\omega}_i > 0$ concluimos

$$p \cdot x \leq p \cdot \bar{\omega}_i + p \cdot \bar{\omega}_i = p \cdot \omega_i,$$

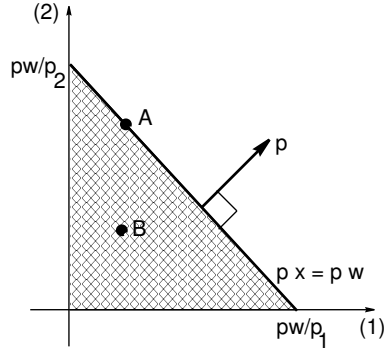
es decir, $\mathbf{B}(\bar{\omega}_i, \epsilon) \subseteq B(p, \omega_i)$, con lo cual queda demostrado que $B(p, \omega_i)$ tiene interior no vacío.

Caractericemos finalmente el interior de $B(p, \omega_i)$ bajo el supuesto que es no vacío. Si $x \in \text{int}B(p, \omega_i)$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $\mathbf{B}(x, \epsilon) \subseteq B(p, \omega_i)$. Luego, dado $e = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}_+^\ell$ se tiene que $x + \eta e \in B(p, \omega_i)$ para $\eta > 0$ suficientemente pequeño (por ejemplo, basta con tomar $\eta = \frac{\epsilon}{2\|e\|}$). Por lo tanto, de la inclusión anterior sabemos que $p \cdot (x + \eta e) \leq p \cdot \omega_i$. Como $p \neq 0$ (es decir, es diferente de cero en al menos una componentes) se tiene que $p \cdot (\eta e) > 0$, de donde se concluye que $p \cdot x < p \cdot \omega_i$. Claramente de lo anterior se tiene que $0_{\mathbb{R}^\ell} \ll_\ell x$, ya que en caso contrario tomando $x - \eta e \in \mathbf{B}(x, \epsilon) \subseteq B(p, \omega_i)$ se concluye que alguna de sus componentes sería negativa, lo que no es posible pues el punto está en el presupuesto. Supongamos ahora que $p \cdot x < p \cdot \omega_i$, con x estrictamente positivo. Sea entonces $\epsilon = \frac{p \cdot \omega_i - p \cdot x}{2} > 0$. Note que dado $z \in \mathbf{B}(0, \epsilon)$, $|p \cdot z| \leq \|p\| \epsilon \leq \epsilon$. Luego, para todo $z \in \mathbf{B}(0_{\mathbb{R}^\ell}, \epsilon)$ se cumple que $p \cdot (x + z) \leq p \cdot \omega_i$, es decir, $\mathbf{B}(x, \epsilon) \subseteq B(p, \omega_i)$, con lo cual finaliza la prueba.

En \mathbb{R}^2 , dado $p = (p_1, p_2) \in \Delta_2$ y dado $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}_{++}^2$, el conjunto presupuestario queda representado en la siguiente figura

³Recuerde que $x_n \in \mathbb{R}_+^\ell$, por lo cual siempre existe una cota por abajo. El punto es probar que hay acotamiento por arriba.

⁴En lo que sigue, la bola de centro x_0 y radio $r > 0$ se denota $\mathbf{B}(x_0, r)$. Esto para distinguirlo del conjunto presupuestario.



Note que un punto interior $B = (b_1, b_2) \in \text{int}B(p, \omega)$ satisface $p \cdot B = p_1 b_1 + p_2 b_2 < p \cdot \omega = p_1 \omega_1 + p_2 \omega_2$. La recíproca no es cierta, es decir, si $p \cdot x < p \cdot \omega_i$ no implica que x es un punto interior de $B(p, \omega)$ (por qué?).

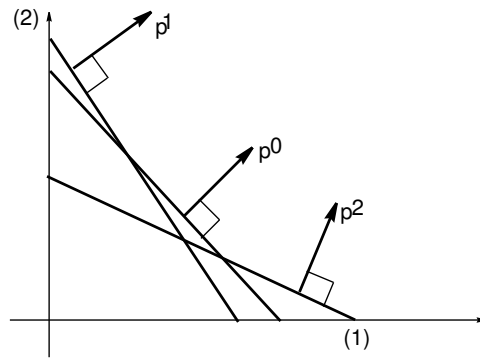
Note finalmente un aspecto geométrico importante: la recta presupuestaria

$$\{x \in \mathbb{R}_+^\ell \mid p \cdot x = p \cdot \omega_i\}$$

se puede re-escribir de la forma

$$p \cdot (x - \omega_i) = 0.$$

Luego, por definición, el vector de precios es siempre **ortogonal** a la recta presupuestaria, tal como se muestra en la figura anterior. Note que un cambio en los precios implica un cambio en la recta presupuestaria y por ende en el conjunto presupuestario. Más aun, modificaciones en los precios implican rotaciones de dicha recta tal como se muestra en la siguiente figura (se ilustra sólo la recta presupuestaria del conjunto):



Otra manera de modificar el conjunto presupuestario es a través de cambiar las dotaciones iniciales ω_i . De hecho, dado un precio $p = (p_1, p_2)$, un aumento en alguna de las componentes de ω_i implica que la recta (plano) que define la frontera superior se traslada hacia la derecha y arriba; al contrario con disminuir los valores de las dotaciones iniciales.

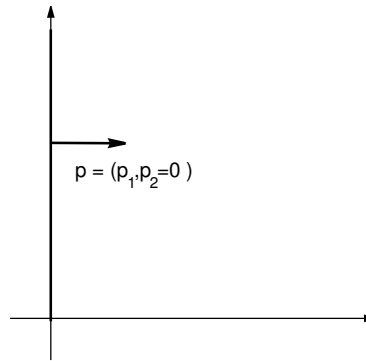
En resumen, a través de modificaciones en el precio y dotaciones iniciales, la frontera presupuestaria o bien **rota** o bien se **traslada** en el espacio.

Finalmente una cuestión de tipo normativo: el tamaño del conjunto presupuestario es una medida indicativa de las posibilidades de consumo a que puede acceder un individuo, pues todos los puntos de él son canastas de bienes que puede comprar dados los precios y dada la dotación inicial que dispone. De esta manera, si fuera que, por ejemplo, un individuo posee cero dotación inicial de bienes, entonces

su conjunto presupuestario se restringe sólo al vector cero, independientemente de los precios, es decir, no puede acceder a bien alguno para su consumo. Por otro lado, aunque tenga dotaciones positivas, finalmente serán los precios los que han de definir el tamaño del conjunto presupuestario, y estos valores, como veremos, dependen del conjunto de la economía y no sólo del individuo en cuestión.

Ejemplo 2.1

- a.- Si $p = (p_1, p_2) \in \text{int}\Delta_2$, entonces el conjunto presupuestario tiene la forma usual siempre y cuando alguna de las dotaciones iniciales es diferentes de cero,
- b.- si el precio $p_1 > 0$, $p_2 = 0$ y las dotaciones son tal que $p \cdot \omega_i = 0$, entonces el conjunto presupuestario no tiene interior (JUSTIFICAR) tal como lo muestra la siguiente figura:



2.3 La demanda en un modelo de intercambio

En el contexto en que estamos trabajando, dado un precio $p \in \Delta$, la **demanda** de un individuo $i \in I$ se define simplemente como aquel (aquellos) elementos del conjunto presupuestario $B(p, \omega_i)$ que maximizan la utilidad u_i del individuo, es decir, como las soluciones del siguiente problema de optimización (llamado problema del consumidor):

$$\mathcal{P}_i : \begin{cases} \max & u_i(x) \\ \text{s.a} & x \in B(p, \omega_i). \end{cases}$$

El problema anterior puede no tener solución, tener muchas soluciones o una única solución (es decir, la demanda puede no existir, haber muchos puntos de demanda o haber un único punto de demanda). Lo que finalmente determina lo anterior son las propiedades de la función de utilidad y del conjunto presupuestario.

Proposición 2.4 *Si la función de utilidad u_i , $i \in I$, es continua, la demanda del individuo $i \in I$ existe para cualquier $p \in \text{int}\Delta$.*

Prueba. La demostración es directa considerando que si $p \in \text{int}\Delta$ entonces $B(p, \omega_i)$ es compacto. Como la función de utilidad es continua, existe entonces solución al problema \mathcal{P}_i (“continua sobre compacto alcanza su máximo y su mínimo”). \square

Para que la demanda sea única se deben imponer condiciones adicionales a la función de utilidad. La siguiente proposición nos entrega un resultado al respecto.

Proposición 2.5 *Si la función de utilidad u_i , $i \in I$, es continua y estrictamente cóncava, entonces la demanda del individuo $i \in I$ existe para cualquier $p \in \text{int}\Delta$.*

Prueba. Recordemos que u_i es estrictamente cóncava si para todo $x, y \in \mathbb{R}^\ell$ y para todo $\lambda \in]0, 1[$ se cumple que

$$u_i(\lambda x + (1 - \lambda)y) > \lambda u_i(x) + (1 - \lambda)u_i(y).$$

De la continuidad de u_i y la compacidad de $B(p, \omega_i)$ sigue que la demanda existe. Supongamos entonces que no es única, es decir, supongamos que $x^*, x' \in B(p, \omega_i)$ son demandas. Luego, para todo $x \in B(p, \omega_i)$ se cumple que $u_i(x) \leq u_i(x^*)$ y $u_i(x) \leq u_i(x')$. Con esto, $u_i(x^*) = u_i(x')$. Por otro lado, como $B(p, \omega_i)$ es convexo, sabemos que para cada $\lambda \in]0, 1[$, $\lambda x^* + (1 - \lambda)x' \in B(p, \omega_i)$. Por lo tanto, $u_i(\lambda x^* + (1 - \lambda)x') \leq u_i(x^*)$ (1). Pero, por cóncavidad estricta, sabemos que

$$u_i(\lambda x^* + (1 - \lambda)x') > \lambda u_i(x^*) + (1 - \lambda)u_i(x') = \lambda u_i(x^*) + (1 - \lambda)u_i(x^*) = u_i(x^*),$$

lo que obviamente es una contradicción con la desigualdad (1) anterior. \square

Finalmente, partiendo que la demanda existe (continuidad) y es única (cóncavidad), resta por considerar el caso eventual que ella esté localizada en el interior del conjunto presupuestario. Este hecho eventual puede implicar problemas como veremos más adelante, razón por la cual se requieren condiciones adicionales a las anteriores con el fin de garantizar que la demanda este siempre localizada en la recta presupuestaria.

Proposición 2.6 *Si la función de utilidad es estrictamente creciente por componentes, entonces (de existir) la demanda yace en la recta presupuestaria.*

Prueba. Sea x^* una (la) demanda del individuo $i \in I$ al precio $p \in \Delta$. Supongamos entonces que $x^* \in \text{int}B(p, \omega_i)$. Por lo tanto, existe $\epsilon > 0$ tal que $\mathbf{B}(x^*, \epsilon) \subseteq B(p, \omega_i)$. Entonces, dado $e = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^\ell$, el punto $x' = x^* + \delta e$ estará en la bola $\mathbf{B}(x^*, \epsilon)$ para δ suficientemente pequeño⁵. Como la función de utilidad es estrictamente creciente, es claro entonces que $u_i(x^*) < u_i(x')$, lo que contradice el hecho que x^* es demanda. Luego, necesariamente x^* está en la recta presupuestaria, es decir,

$$p \cdot x^* = p \cdot \omega_i,$$

lo que termina la prueba. \square

En resumen, es una hipótesis de continuidad la que garantiza la existencia de demanda (habida cuenta de precios sin componentes cero!), es una hipótesis de cóncavidad la que garantiza la unicidad y es una hipótesis de monotonía la que garantiza que las demandas estén en la recta presupuestaria. **En todo lo que sigue, asumiremos que las funciones de utilidad son continuas, estrictamente cóncavas y crecientes estrictas por componentes.**

De lo anterior entonces, el problema del consumidor se puede re-plantear equivalentemente como

$$\mathcal{P}_i \Leftrightarrow \begin{cases} \max & u_i(x) \\ \text{s.a} & p \cdot x = p \cdot \omega_i. \end{cases}$$

Ya que bajo los supuestos asumidos se tiene que la solución del problema anterior es única cuando los precios están en el interior del Simplex, podemos entonces definir la demanda del individuo $i \in I$ como una función $x_i : \text{int}\Delta \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ tal que $x_i(p)$ es la solución del problema \mathcal{P}_i .

⁵Por ejemplo, basta con escoger

$$\delta = \frac{\epsilon}{2\sqrt{n}} > 0$$

para que se cumpla lo indicado.

Nota 2.2 *Por qué tanta insistencia con que los precios deben estar en el interior del Simplex? La razón es que, bajo los supuestos sobre la función de utilidad, si los precios no están en el interior del Simplex, entonces la demanda no está bien definida. En efecto, si $p \in \text{fr}\Delta$ corresponde a decir que alguna de sus componentes es cero, digamos, p_1 . En tal caso, el conjunto $B(p, \omega_i)$ no es compacto, más aun, no es acotado en la primera componente. Luego, la maximización de la utilidad (y considerando que esta es creciente estricta por componentes) nos lleva a una solución no acotada, al menos en la primera componente. Esto obviamente no permite definir la demanda. La forma “económica” de interpretar lo anterior es considerando que si un precio es cero, entonces podemos demandar libremente del bien correspondientes sin que esto implique modificar la riqueza. Como la función de utilidad es creciente por componentes, entonces la demanda será infinita en esa componente.*

Concluamos esta sección con la proposición más importante.

Proposición 2.7 *Bajo los supuestos que hemos asumido sobre la función de utilidad, se tiene que la función $x_i(p)$ es continua en el interior del Simplex.*

Prueba. En lo que sigue omitiremos el índice $i \in I$. Así, la utilidad genérica será u y las dotaciones ω . Sea $p_n \in \text{int}\Delta$ tal que $p_n \rightarrow p \in \text{int}\Delta$ y sea $x_n = x(p_n)$ la demanda de un individuo cualquiera. Sea además $x \in B(p, \omega)$ la demanda al precio p . Para demostrar la continuidad de la demanda, debemos probar que $x_n \rightarrow x$. Para ello, veamos primero que x_n es acotada. En efecto, dado que x_n es demanda, se cumple que $p_n \cdot x_n = p_n \cdot \omega_i$. Pero $p_n \rightarrow p$, luego p_n se puede escribir como $p_n = p + h_n$, con $h_n \rightarrow 0_{\mathbb{R}^\ell}$. En consecuencia, $p_n \cdot \omega_i = p \cdot \omega_i + h_n \cdot \omega_i$. Así, usando desigualdad de Cauchy - Schawartz, sigue que

$$p_n \cdot \omega_i \leq p \cdot \omega_i + \|h_n\| \|\omega_i\|,$$

de lo cual, considerando que $h_n \rightarrow 0_{\mathbb{R}^\ell}$, se tiene que para n suficientemente grande, $\|h_n\| \leq 1$, por lo que, finalmente, para n suficientemente grande se cumple que

$$p_n \cdot \omega_i \leq p \cdot \omega_i + \|\omega_i\|.$$

Luego, del hecho que $p_n \cdot x_n = p_n \cdot \omega_i$, se concluye que para cada $k \in L$:

$$p_{nk}x_{nk} \leq p_n \cdot \omega_i \Rightarrow p_{nk}x_{nk} \leq p \cdot \omega_i + \|\omega_i\|,$$

siendo x_{nk} la componente k del vector x_n . Como $p_n \rightarrow p$, se tiene que $p_{nk} \rightarrow p_k > 0$. Por lo tanto, dado $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, sabemos que para n suficientemente grande $0 < p_k - \epsilon < p_{nk} < p_k + \epsilon$, con lo que

$$0 \leq x_{nk} \leq \frac{p \cdot \omega_i + \|\omega_i\|}{p_k - \epsilon}.$$

Lo anterior muestra que x_{nk} está acotado para n suficientemente grande, por lo que x_n también lo está. De esta manera, sin pérdida de generalidad podemos suponer que x_n converge (esto ya que al menos una sub-secuencia del ella lo hace). Supongamos que $x_n \rightarrow x^*$. Veamos ahora que $x^* \in B(p, \omega)$. En efecto, del hecho que

$$p_n \cdot x_n = p_n \cdot \omega$$

como todas las sucesiones convergen podemos tomar límites directamente en la igualdad anterior para concluir que $p \cdot x^* = p \cdot \omega$, es decir, $x^* \in B(p, \omega)$.

Para terminar la demostración, resta probar que $x = x^*$. Para ello, supongamos que $x \neq x^*$. Como $x^* \in B(p, \omega)$, sabemos que $u(x^*) \leq u(x)$. De hecho, como la demanda es única (concavidad),

se tiene que $u(x^*) < u(x)$ (caso contrario, si $u(x^*) = u(x)$ tendríamos que x^* es demanda, lo que no es posible ya que $x \neq x^*$). Veamos ahora que para cada n_0 existe algún $n \geq n_0$ tal que $x \in B(p_n, \omega)$. En caso contrario, existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple que $x \notin B(p_n, \omega)$, es decir, tal que $p_n \cdot x > p_n \cdot \omega$. Sea

$$\delta_n = p_n \cdot x - p_n \cdot \omega > 0$$

y sea

$$\bar{x}_n = x - \delta_n e$$

con $e = (1, 1, \dots, 1)$. Note que $\delta_n \rightarrow 0$ y que $\bar{x}_n \in B(p_n, \omega)$ ya que $p_n \cdot \bar{x}_n = p_n \cdot x - \delta_n = p_n \cdot \omega$. Luego, se tendrá que

$$u(\bar{x}_n) \leq u(x_n)$$

lo cual implica que $u(x) \leq u(x^*)$, que no puede ser por lo ya visto. Luego, necesariamente para cada $n_0 \in \mathbb{N}$ ha de existir $n' \geq n_0$ tal que $x \in B(p_{n'}, \omega)$. Esto permite definir una sub-sucesión de x_n , digamos $x_{n'}$ con los índices n' que satisfacen lo anterior) de tal forma que $x \in B(p_{n'}, \omega)$. Luego, se cumple que

$$u(x) \leq u(x_{n'}).$$

Pero $x_{n'}$ converge a x^* ya que la sucesión $x_n \rightarrow x^*$. Luego, de la continuidad de u se deduce que $u(x) \leq u(x^*)$ que es una contradicción con el hecho que $u(x^*) < u(x)$. Con esto queda probada la continuidad de $u(\cdot)$ en función de los precios en el interior del Simplex. \square

Ejemplo 2.2 Para el caso de un mercado con dos bienes, la demanda de un individuo $i \in I$ se obtiene de resolver un problema de optimización de la forma

$$\begin{cases} \max & u_i(x_1, x_2) \\ \text{s.a} & p_1 x_1 + p_2 x_2 = p_1 \omega_{i1} + p_2 \omega_{i2}. \end{cases}$$

Puesto que los precios los podemos normalizar según nos convenga; así, al asumir que $p_1 = 1$ y que $p_2 = p$ el problema queda como

$$\begin{cases} \max & u_i(x_1, x_2) \\ \text{s.a} & x_1 + p x_2 = \omega_{i1} + p \omega_{i2}. \end{cases}$$

Con esto, la demanda por el bien dos proviene de maximizar la siguiente función

$$u_i(\omega_{i1} + p \omega_{i2} - p x_2, x_2).$$

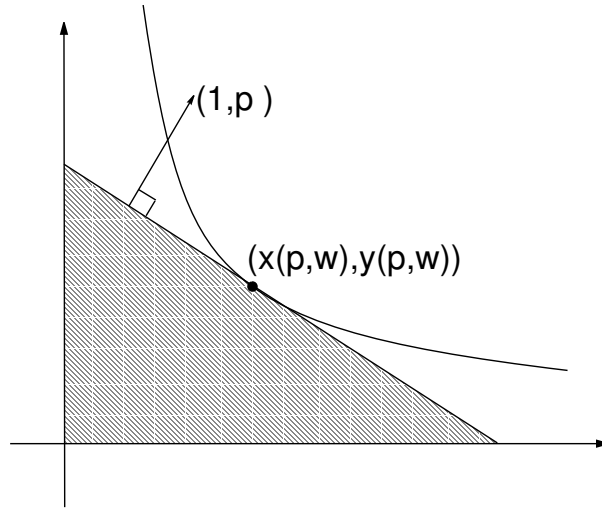
Si suponemos que la función de utilidad es derivable, se tiene que aplicando la regla de la cadena la condición de optimalidad es

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial [\omega_{i1} + p \omega_{i2} - p x_2]}{\partial x_2} + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \cdot (-p) + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} = 0$$

es decir,

$$\frac{\frac{\partial u_i}{\partial x_1}}{\frac{\partial u_i}{\partial x_2}} = \frac{1}{p}.$$

Geométricamente, esta condición corresponde a que *en la demanda, la curva de indiferencia es tangente a la recta presupuestaria*, cuestión que se ilustra en la siguiente figura.



Finalmente note la demanda depende tanto de las dotaciones iniciales de los individuos como del precio de los bienes. Si el precio se modifica, entonces la demanda puede cambiar (la recta presupuestaria cambia de pendiente); si las dotaciones iniciales se modifican la demanda puede cambiar ya que la recta presupuestaria se traslada paralelamente.

2.4 El equilibrio en el modelo de intercambio

Dado $p \in \Delta$ un precio de los bienes, sabemos que la demanda $x_i(p)$ de individuo representa sus “intenciones” de compra de bienes. A priori, estas intenciones no necesariamente se han de condecir con la cantidad de bienes que hay en la economía. El cocepto de equilibrio que vamos a definir es uno donde, por un lado, los agentes no tienen injerencia individual en el precio final de los bienes y, por otro lado, el precio que se determine debe ser compatible con la dotación total de recursos que existen en la economía. Que el precio no pueda ser fijado por ningún agente en particular lleva a lo que en economía se denomina *situación competitiva*.

Definición 2.1 Diremos que $p^* \in \Delta$ es un **precio de equilibrio** para la economía $\mathcal{E} = (u_i, \omega_i)_{i \in I}$ si

$$\sum_{i \in I} x_i(p^*) = \sum_{i \in I} \omega_i.$$

Las demandas $x_i(p^*)$ serán entonces las **asignaciones de Equilibrio** al precio p^* ⁶.

Una forma equivalente de presentar el equilibrio es por medio de la llamada función **exceso de demanda**.

Definición 2.2 Dado $p \in \Delta$, definimos la función **exceso de demanda** como $z : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ tal que

$$z(p) = \sum_{i \in I} x_i(p) - \sum_{i \in I} \omega_i.$$

⁶En rigor, la condición de factibilidad se debería referir al hecho que la suma de las demandas debe ser igual o menor, por componentes, que la cantidad total de recursos de la economía. Sin embargo, puesto que las funciones de utilidad son estrictamente crecientes por componentes, entonces al precio de equilibrio siempre se consumirán todos los bienes de la economía, de modo que asumir la igualdad como en la definición no introduce ninguna particularidad en el modelo.

De lo anterior entonces, un precio $p^* \in \Delta$ es de equilibrio si y sólo si

$$z(p^*) = 0_{\mathbb{R}^\ell}.$$

Proposición 2.8

- (a) Para todo $p \in \text{int}\Delta$ se tiene que $p \cdot z(p) = 0$.
- (b) $z(\cdot)$ es una función continua.
- (c) Supongamos que $\omega = \sum_{i \in I} \omega_i \in \mathbb{R}_{++}^\ell$, dado $p \in \text{fr}\Delta$ y dada $p_n \in \text{int}\Delta$ tal que $p_n \rightarrow p$ se tiene que

$$\|z(p_n)\| \rightarrow \infty.$$

Prueba. La parte (a) es lo que denomina la **condición de Walras** para la función exceso de demanda. La prueba es directa considerando que dado $p \in \text{int}\Delta$, sabemos que $p \cdot x_i(p) = p \cdot \omega_i$, $i \in I$. Por lo tanto,

$$p \cdot (x_i(p) - \omega_i) = 0 \Rightarrow p \cdot \sum_{i \in I} [x_i(p) - \omega_i] = 0,$$

es decir, $p \cdot z(p) = 0$. La parte (b) es directa considerando que la demanda es continua en el interior del Simplex. La parte (c) es la más complicada de probar. Para ello, notemos en primer lugar que si $\sum_{i \in I} \omega_i \in \mathbb{R}_{++}^\ell$, entonces $p \cdot [\sum_{i \in I} \omega_i] > 0$ y por lo tanto existe $i_0 \in I$ tal que $p \cdot \omega_{i_0} > 0$. Por lo tanto, ya que $p_n \rightarrow p$ tenemos que para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, $r_n = p_n \omega_{i_0} > 0$. Más aun, dado $\epsilon > 0$, existe n_0 suficientemente grande tal que $r_n \leq p \cdot \omega_{i_0} + \epsilon$, $\forall n \geq n_0$. Por otro lado, ya que $p_n \rightarrow p \in \text{fr}\Delta$, sin pérdida de generalidad supondremos que $p_1 = 0$, $p_j > 0$, $j \neq 1$. Se tiene entonces lo siguiente:

- c.1. mostremos que $x_{i_0j}(p_n)$, $j \neq 1$, es acotado por arriba (y por lo tanto acotada ya que por definición es acotada por abajo, siendo 0 su cota inferior). En efecto, dado n suficientemente grande, sabemos que

$$0 \leq p_n x_{i_0}(p_n) = p_{n1} x_{i_01}(p_n) + \sum_{j \neq 1} p_{nj} x_{i_0j}(p_n) = r_n \leq p \cdot \omega_{i_0} + \epsilon$$

lo cual implica el acotamiento por arriba de $x_{i_0j}(p_n)$, pues en caso contrario no se puede garantizar la desigualdad anterior dado que $p_{nj} \rightarrow p_j > 0$. Más aun, de lo anterior podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que la sucesión $x_{i_0j}(p_n)$, $j \neq 1$, es **convergente**⁷.

- c.2. Mostremos que $x_{i_01}(p_n)$ es **no acotado**. Si lo fuera, entonces nuevamente podríamos suponer sin pérdida de generalidad que $x_{i_01}(p_n)$ converge, digamos a $x_{i_01}(p) \in \mathbb{R}_+$. Luego, del hecho que

$$p_{n1} x_{i_01}(p_n) + \sum_{j \neq 1} p_{nj} x_{i_0j}(p_n) = p_n \omega_{i_0}$$

tomando límite (todo es convergente) se tiene que

⁷Esto viene de lo siguiente: ya que $x_{i_0j}(p_n)$ es acotada (es ≥ 0 y acotada por arriba como hemos probado) se tiene que existe una sub-sucesión de ella que converge. Luego, podemos asumir que la sucesión converge pues en caso contrario trabajamos con los índices de la sub-sucesión.

$$0 \cdot x_{i_0 1}(p) + \sum_{j \neq 1} p_j x_{i_0 j}(p) = p \cdot \omega_{i_0}.$$

Sin embargo, para los precios indicados, de la monotonía de u_{i_0} se tiene que cualquier otra canasta donde el primer término es un valor positivo cualquiera mayor que $x_{i_0 1}(p)$ y el resto es $x_{i_0 j}(p)$, es una canasta factible y preferida estrictamente a la encontrada. Luego, el punto anterior no puede ser la demanda y con ello se tiene el no - acotamiento de $x_{i_0}(p_n)$ cuando $p_n \rightarrow p \in fr\Delta$.

Por lo tanto, ya que

$$z(p_n) = \sum_{i \in I} x_i(p_n) - \sum_{i \in I} \omega_i$$

se concluye que $z(p_n)$ es **no** acotado cuando $p_n \rightarrow p \in fr\Delta$, es decir, $\|z(p_n)\| \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \infty$. \square

Notemos que la condición de Walras $p \cdot z(p)$ se satisface ya sea que p es precio de equilibrio o no. Por lo tanto, si efectivamente fuese que $p \in int\Delta$ es un precio de equilibrio, entonces sabemos que $z(p) = 0$ y además $p \cdot z(p) = 0$. Por lo tanto, si las $\ell - 1$ primeras componentes de $z(p)$ son cero (es decir, si los $\ell - 1$ primeros mercados están equilibrados), simplemente por la condición de Walras ocurre que el último mercado también está equilibrado. En efecto, que los primeros $\ell - 1$ mercados estén equilibrados corresponde a decir que las primeras $\ell - 1$ componentes del vector $z(p) - \omega$ son cero. Luego, si la última componente no es cero, del hecho que $p \cdot [z(p) - \omega] = 0$, al ser $p_\ell > 0$ se tendría que p_ℓ por esta última componente sería positivo, lo que no es posible dada la identidad de Walras. En resumen, en la economía basta que $\ell - 1$ mercados estén equilibrado para que el último también lo esté. Este hecho simple es de gran ayuda en términos prácticos como pasamos a ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3 *Supongamos que las funciones de utilidad de los individuos son funciones Cobb - Douglas de las forma*

$$u_1(x_1, x_2) = x_1^\alpha \cdot x_2^{1-\alpha}$$

$$u_2(x_1, x_2) = x_1^\beta \cdot x_2^{1-\beta}$$

y que las dotaciones respectivas son $\omega_1 = (\omega_{11}, \omega_{12})$, $\omega_2 = (\omega_{21}, \omega_{22}) \in \mathbb{R}^2$. Entonces, dado un precio $p \equiv (1, p)^8$, el problema del individuo $i = 1$ es

$$\begin{cases} \max & x_1^\alpha \cdot x_2^{1-\alpha} \\ \text{s.a} & x_1 + p x_2 = \omega_{11} + p \omega_{12}. \end{cases}$$

a partir de lo cual, imponiendo las condiciones de optimalidad, se obtiene que

$$x_{11}(p, \omega_1) = \frac{\alpha[\omega_{11} + p\omega_{12}]}{1}, \quad x_{12}(p, \omega_1) = \frac{(1 - \alpha)[\omega_{11} + p\omega_{12}]}{p}.$$

Análogamente para el individuo 2 las demandas son

$$x_{21}(p, \omega_2) = \frac{\beta[\omega_{21} + p\omega_{22}]}{1}, \quad x_{22}(p, \omega_2) = \frac{(1 - \beta)[\omega_{21} + p\omega_{22}]}{p}.$$

⁸Recordar que los precios los podemos normalizar según nos convenga. En este caso, hemos escogido el bien uno como numerario, lo que nos permite ahorrar una incógnita en todo nuestro análisis!

Por lo tanto, p^* será un precio de equilibrio si

$$\frac{\alpha[\omega_{11} + p\omega_{12}]}{1} + \frac{\beta[\omega_{21} + p\omega_{22}]}{1} = \omega_{11} + \omega_{21}$$

$$\frac{(1 - \alpha)[\omega_{11} + p\omega_{12}]}{p} + \frac{(1 - \beta)[\omega_{21} + p\omega_{22}]}{p} = \omega_{12} + \omega_{22}.$$

Por la condición de Walras **no** necesitamos equilibrar ambos mercados: basta con encontrar el precio de equilibrio en el mercado uno (es decir, la primera ecuación) para que automáticamente el mercado dos esté en equilibrio en el mismo precios. Olvidando entonces la segunda ecuación⁹, se tiene que la incógnita del problema debe satisfacer

$$\alpha[\omega_{11} + p^*\omega_{12}] + \beta[\omega_{21} + p^*\omega_{22}] = \omega_{11} + \omega_{21} \Rightarrow p^* = \frac{(1 - \alpha)\omega_{11} + (1 - \beta)\omega_{21}}{\alpha\omega_{12} + \beta\omega_{22}}$$

Con este precio de equilibrio se pueden obtener las demandas (asignaciones) de equilibrio, que para el individuo uno son dadas por $x_{11}(p^*)$ y $x_{12}(p^*)$ (se reemplaza p^* en la expresión de la demanda). Obviamente $x_{21}(p^*) = \omega_{11} + \omega_{21} - x_{11}^*$ y $x_{22}(p^*) = \omega_{12} + \omega_{22} - x_{12}^*$. Así mismo es posible obtener el ingreso en el equilibrio que para cada individuo es dado por

$$I_1^* = \omega_{11} + p^*\omega_{12}, \quad I_2^* = \omega_{21} + p^*\omega_{22}.$$

Note finalmente que el ingreso de equilibrio depende tanto del precio de equilibrio como de las dotaciones iniciales. \square

En lo que sigue, nos ocuparemos de probar la existencia del equilibrio en la economía, es decir, determinar bajo que condiciones sobre los entes que definen la economía es posible que exista un precio de equilibrio. Para esto, notar que garantizar la existencia de un precio de equilibrio en la economía es equivalente, en el contexto que estamos considerando, a garantizar la existencia de una solución de la ecuación $z(p) = 0_{\mathbb{R}^\ell}$. Ahora bien, note que si p es tal que $z(p) = 0$, resulta que $z(p) + p = p$. Definiendo entonces $g(p)$ como $g(p) = z(p) + p$, el problema de existencia anterior corresponde a encontrar algún punto tal que $g(p) = p$, es decir, que al aplicar la función g no se altera el argumento. Este tipo de puntos que satisfacen esta condición se denominan puntos fijos.

Definición 2.3 Dada una función $g : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}^\ell$, diremos que $\bar{x} \in \mathbb{R}^\ell$ es un **punto fijo** de g si $g(\bar{x}) = \bar{x}$.

De lo anterior entonces, determinar puntos fijos de funciones es equivalente a encontrar raíces de ecuaciones. A partir de esto, determinar la existencia de equilibrios será un problema de determinar la existencia de puntos fijos. Sobre esto último, para demostrar la existencia de puntos fijos tenemos dos caminos. El primero es simplemente encontrarlos explícitamente. El segundo es utilizar algún resultado teórico que nos garantice su existencia habida cuenta de algunas hipótesis que deben ser verificadas. El primer camino es complejo y muchas veces inconducente. El segundo camino requiere de resultados generales de punto fijo y de obviamente comprobar que las funciones involucradas verifican las hipótesis requeridas para su aplicabilidad. Este enfoque es el que utilizaremos en nuestro análisis. Al respecto, el teorema de punto fijo que ocuparemos es aquel de Brouwer, el cual pasamos a enunciar sin hacer la demostración.

Teorema 2.1 Teorema de Punto Fijo de Brouwer.

Sea S un conjunto no vacío, convexo y compacto (en particular, $S = \Delta$) y $f : S \rightarrow S$ una función continua cualquiera. Entonces existe un punto fijo de f en S , es decir, existe $\bar{x} \in S$ tal que $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

⁹Podríamos haber obviado la primera y resolver el problema usando la segunda. La solución es la misma!

Teorema 2.2 Teorema de Existencia de Equilibrio

Si las funciones de utilidad son continuas, estrictamente cóncavas y crecientes por componentes, si además $\omega = \sum_{i \in I} \omega_i \in \mathbb{R}_{++}^\ell$, entonces existe un precio de equilibrio que está en el interior del Simplex, es decir, existe $p^* \in \text{int}\Delta$ tal que $z(p^*) = 0_{\mathbb{R}^\ell}$.

Prueba. Definamos $h : \Delta \rightarrow \Delta$ como

$$h_k(p) = \frac{p_k + \max\{0, z_k(p)\}}{1 + \sum_{j \in L} \max\{0, z_j(p)\}}, \quad k \in L = \{1, 2, \dots, \ell\}.$$

Claramente h es continua en el interior del simplex. Por lo tanto, existe un punto fijo, digamos, p^* . En consecuencia, para todo $k \in L = \{1, 2, \dots, \ell\}$ se tiene que

$$p_k^* = \frac{p_k + \max\{0, z_k(p^*)\}}{1 + \sum_{j \in L} \max\{0, z_j(p^*)\}}, \quad k \in L = \{1, 2, \dots, \ell\},$$

lo cual implica

$$p_k^* \sum_{j \in L} \max\{0, z_j(p^*)\} = \max\{0, z_k(p^*)\}, \quad k = 1, 2, \dots, \ell.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} z_k(p^*) \left[p_k^* \sum_{j \in L} \max\{0, z_j(p^*)\} \right] &= z_k(p^*) \max\{0, z_k(p^*)\} \Rightarrow \\ \sum_{k \in L} z_k(p^*) \left[p_k^* \sum_{j \in L} \max\{0, z_j(p^*)\} \right] &= \sum_{k \in L} z_k(p^*) \max\{0, z_k(p^*)\}. \end{aligned}$$

Ordenando los términos, esta última expresión es equivalente a

$$\sum_{k \in L} p_k^* z_k(p^*) \left[\sum_{j \in L} \max\{0, z_j(p^*)\} \right] = \sum_{k \in L} z_k(p^*) \max\{0, z_k(p^*)\}.$$

Por ley de Walras, el término de la izquierda es cero, luego

$$\sum_{k \in L} z_k(p^*) \max\{0, z_k(p^*)\} = 0,$$

lo que finalmente implica que cada $z_k(p^*)$ debe ser igual a cero, es decir, que p^* es un precio de equilibrio. \square

Ejemplo 2.4 Consideremos una economía con tres consumidores y dos bienes. Cada uno de ellos es caracterizado de la siguiente manera:

$$u_1(x, y) = xy, \quad u_2(x, y) = x^2y, \quad u_3(x, y) = xy^2$$

$$\omega_1 = (1, 2), \quad \omega_2 = (1, 1), \quad \omega_3 = (2, 3).$$

Note que las funciones de utilidad anteriores cumplen con todas las propiedades (**verificar como ejercicio**) que garantizan la existencia y unicidad de la demanda para $p \gg 0$. De hecho, dado $p = (p_1, p_2) \gg 0$, se puede probar que (Ejercicio)

$$d_1(p) = \left(\frac{p_1 + 2p_2}{2p_1}, \frac{p_1 + 2p_2}{2p_2} \right)$$

$$d_2(p) = \left(\frac{2p_1 + 2p_2}{3p_1}, \frac{p_1 + p_2}{3p_2} \right)$$

$$d_3(p) = \left(\frac{2p_1 + 3p_2}{3p_1}, \frac{4p_1 + 6p_2}{3p_2} \right)$$

Por lo tanto, con lo anterior se tiene que

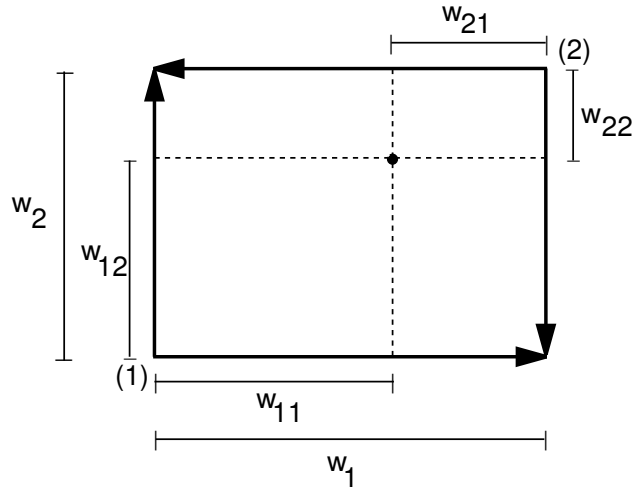
$$z(p) = \left(\frac{11p_1 + 16p_2}{6p_1}, \frac{13p_1 + 20p_2}{6p_2} \right) - (4, 6)$$

y con ello, un precio de equilibrio es

$$z(p) = (0, 0) \Leftrightarrow p^* = \left(\frac{16}{29}, \frac{13}{29} \right).$$

2.5 La caja de Edgeworth

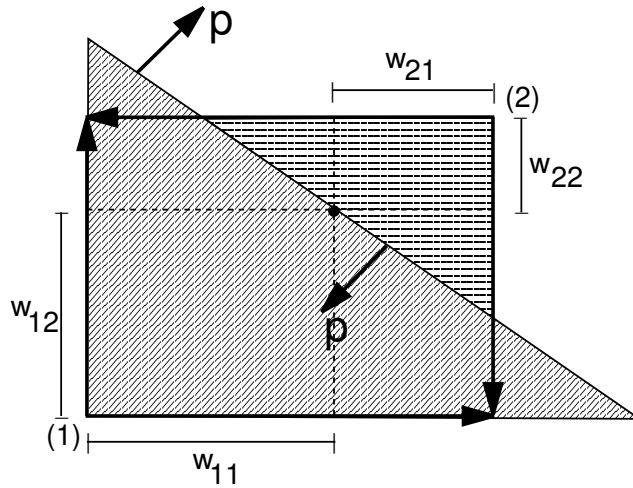
Una forma muy útil para ilustrar el equilibrio de intercambio con **dos** bienes y **dos** agentes (economía de 2×2) es por medio de la llamada **caja de Edgeworth**. Para ello, supongamos que del bien $j = 1, 2$ las dotaciones iniciales son ω_{ij} , con $i = 1, 2$ denotando al consumidor. Sea entonces $\omega_j = \omega_{1j} + \omega_{2j}$ la cantidad total de bien j en la economía. Un punto de dotaciones iniciales cualquiera se puede ilustrar en la siguiente figura:



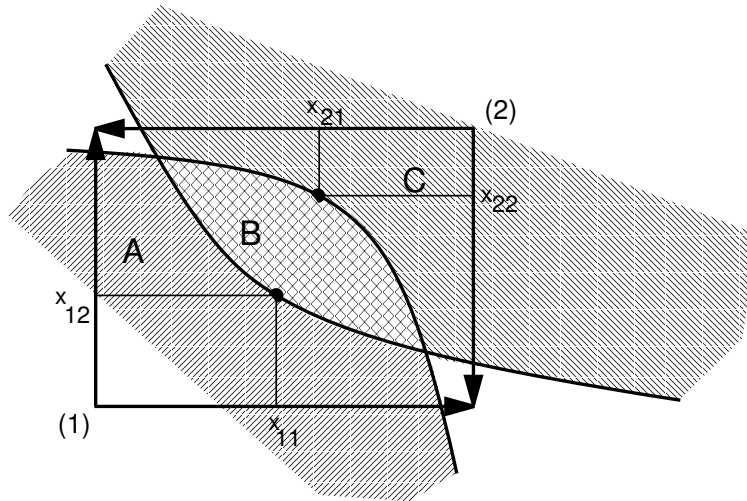
donde los orígenes para los individuos 1 y 2 son representados por (1) y (2) respectivamente. El sentido de los ejes (crecimiento) es indicado por las flechas en la figura.

De acuerdo a la definición anterior se tiene que de existir equilibrio en la economía, necesariamente el consumo óptimo debe ser alguno de los puntos de la figura (caja) anterior, pues cualquier punto factible en el sentido de Walras (igualdad demanda con dotaciones iniciales) es un punto de la caja.

En la siguiente figura, dada una dotación inicial $\omega_i = (\omega_{i1}, \omega_{i2})$, $i = 1, 2$, y dado un precio $p \equiv (1, p)$, se ilustra el conjunto de restricción presupuestario para ambos individuos. Note que dicho conjunto no necesariamente ha de estar contenido en la caja de Edgeworth (caso individuo 1).

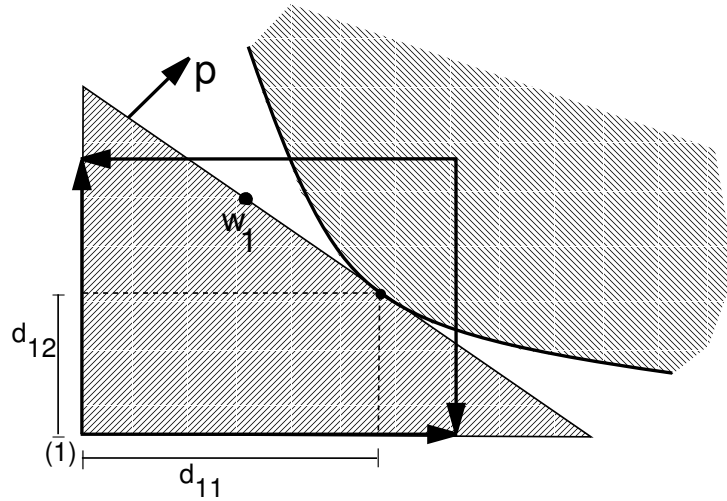


Por otro lado, dado un punto de consumo cualquiera (x_{i1}, x_{i2}) , $i = 1, 2$, en la siguiente figura se ilustra el conjunto de los preferidos al punto respectivo.

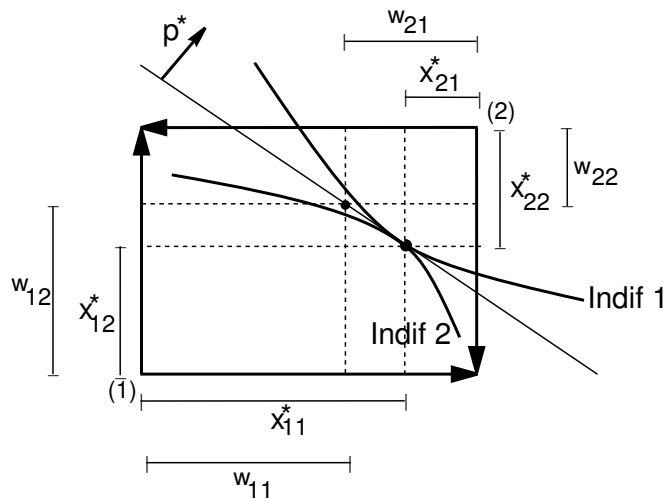


Note que eventualmente existen puntos que son comunes a los preferidos para ambos individuos (conjunto B en la figura).

Finalmente, con el fin de ilustrar un equilibrio de Walras, en primer lugar recordemos que la demanda de un individuo es el elemento maximal de la preferencia sobre el conjunto presupuestario, que corresponde a aquellos puntos del conjunto presupuestario que intersectados con los preferidos estrictamente a dicho punto resulta en conjunto vacío. Por lo tanto, si suponemos que la preferencia es continua, de modo que los preferidos son la clausura de los preferidos estrictos, se tiene que dichos puntos corresponden a aquellos donde se da tangencia entre los preferidos y el conjunto presupuestario. La siguiente figura ilustra para el individuo 1 la demanda dado un precio $p \equiv (1, p) \in \mathbb{R}^2$.

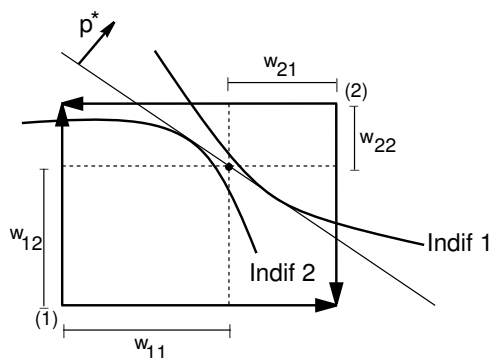


Por lo tanto, un precio $p^* \equiv (1, p^*)$ y una asignación (x_{i1}^*, x_{i2}^*) , $i = 1, 2$, será de equilibrio si dichos puntos satisfacen las condiciones de tangencia anterior y además la asignación está en la caja de Edgeworth, ya que en tal caso se garantiza la factibilidad de la demanda agregada. Un equilibrio se ilustra en la siguiente figura.



Note que:

- La tangencia de los preferidos con la recta presupuestaria **debe darse en el mismo punto de la caja de Edgeworth** para ambos individuos (tal como se ilustra en la figura), pues esto garantiza la factibilidad.
- Para un precio dado, digamos p^* , puede no haber equilibrio ya que *la tangencia se da en puntos distintos*. La siguiente figura ilustra lo anterior.



2.6 Optimalidad y teoremas de bienestar en el modelo de intercambio

La asignación de equilibrio es una dentro de muchas que se puedan establecer en la economía. Por ejemplo, en el modelo de intercambio uno podría pensar en asignaciones que son *equitativas* en el sentido que a todos los individuos les toca por igual en la repartición de bienes, otras que son *inequitativas*, donde, por ejemplo, sólo a uno de los individuos se le entregan todos los bienes y nada para los demás, etc.

Qué es lo que define si una asignación de bienes es *buen*a o *mal*a? Obviamente la bondad o no de una asignación debe ser un criterio exógeno a la economía en el sentido que proviene de un acuerdo entre todos nosotros para definir la calidad de la asignación. Al respecto, **no existe un acuerdo universal y objetivo** que nos permita decir si una distribución es *buen*a o *mal*a: la “calidad” de una asignación es subjetivo y muchas veces obedece a razones políticas, en un amplio sentido de la palabra. Para ilustrar la complejidad del problema de asignación de recursos, imaginemos una situación donde Uds. deben decidir entregar bienes a personas que los necesitan. Cómo se hace la asignación sin tener que provocar malestar en algunos o injusticias con otros? Qué significa la equidad o la justicia en la asignación? No es claro como abordar el asunto.

Tal vez el único criterio ampliamente aceptado por la profesión con el fin de calificar una asignación de bienes sea aquel de **optimalidad de Pareto**, que en definitiva nos da cuenta de la **eficiencia económica** en la asignación de los recursos.

Definición 2.4 Diremos que una asignación de recursos de la economía $(x_i^*) \in \mathbb{R}^{m \times \ell}$ es **factible** si

$$\sum_{i \in I} x_i^* = \omega.$$

Denotaremos por $F \subseteq \mathbb{R}^{m \times \ell}$ el conjunto de asignaciones factibles de la economía.

Definición 2.5 Diremos que $(x_i^*) \in F$ es un **óptimo de Pareto** si **no existe** otra asignación $(x'_i) \in F$ tal que para cada $i \in I$ se cumple que $u_i(x^*) \leq u_i(x'_i)$ y que para algún $i_0 \in I$, $u_{i_0}(x^*) < u_{i_0}(x'_{i_0})$.

Que la asignación de bienes sea factible corresponde a decir que la suma de todos los bienes de la misma coincide con la cantidad total de bienes de la economía. Qué una asignación sea óptimo de Pareto básicamente significa que los recursos fueron distribuidos de tal forma que nada sobre en la economía: la asignación de recursos de la economía es tal que no se pueden reasignar de modo que se mejore el bienestar de toda la comunidad (o al menos mantenerlo constante) mejorando estrictamente al menos a uno de ellos.

Notemos que si x_i^* es una asignación de equilibrio (precio de equilibrio p^*), entonces de haber otra asignación factible $(x'_i) \in F$ tal que $u_i(x^*) \leq u_i(x'_i)$ y al menos para algún i_0 se cumpla que

$u_{i_0}(x_{i_0}^*) < u_{i_0}(x'_{i_0})$, se tendría que $p^* \cdot x_i^* \leq p^* \cdot x'_i$, $i \in I$, y además $p^* \cdot x_{i_0}^* < p^* \cdot x'_{i_0}$. Esto último se tiene ya que en caso contrario x'_{i_0} pertenecería a $B(p^*, \omega_{i_0})$ y por lo tanto, dada la definición de demanda, $u_{i_0}(x_{i_0}^*) \geq u_{i_0}(x'_{i_0})$. Luego, sumando todas las desigualdades anteriores,

$$p^* \cdot \sum_{i \in I} x_i^* < p^* \cdot \sum_{i \in I} x'_i \Rightarrow p^* \cdot \omega < p^* \cdot \sum_{i \in I} x'_i.$$

Pero $(x'_i) \in F$, razón por la cual $\sum_{i \in I} x'_i = \omega$ y por lo tanto, $p^* \cdot \sum_{i \in I} x'_i = p^* \cdot \omega$, lo que contradice lo anterior. Con esto hemos probado entonces la siguiente proposición.

Teorema 2.3 Primer Teorema de Bienestar

Toda asignación de equilibrio es un óptimo de Pareto.

La proposición *recíproca* de la anterior es conocida como el **Segundo Teorema de bienestar**, y su enunciado es algo más complejo. Para fijar ideas, supongamos que un dictador asigna los recursos totales de la economía, pero que este dictador no es tonto y los asigna de manera eficiente, en el sentido de Pareto, de tal forma que todos los individuos tocan algo en la repartición. Alguien entonces podría argumentar que esta asignación está fuera de mercado y obedece sólo al criterio de este dictador. Sin embargo, si fuera el caso que el dictador decide argumentar para defender su asignación, nada mejor para él si pudiese demostrar que efectivamente la asignación que ha hecho podría ser considerada como una asignación de mercado, donde los precios son tales que el intercambio competitivo que se produce a los precios indicados es precisamente la asignación impuesta. Si el dictador supiese de economía precisamente estaría seguro que lo indicado ocurre, pues el **Segundo Teorema de Bienestar** afirma que *toda asignación Pareto óptima donde todos los individuos tocan algo de bienes es compatible con algún precio de mercado, en el sentido que a ese precio se daría que las transacciones de intercambio serían exactamente aquellas definidas por el óptimo de Pareto*. Esto es lo que en economía se conoce como **descentralización** del Pareto, y constituye uno de los resultados más importantes de la economía. Para demostrar este importante resultado se requiere del Teorema de Separación de Hahn - Banach.

Previo a enunciar el Teorema de Separación de Hahn - Banach necesitamos recordar algunos conceptos. Diremos que un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^\ell$ es **convexo** si para todo $x, y \in C$ y para todo $\lambda \in [0, 1]$ se tiene que

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in C.$$

Por otro lado, dados $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{R}^\ell$ dos conjuntos convexos cualesquiera, es directo que el conjunto suma definido como

$$C_1 + C_2 = \{c_1 + c_2, c_1 \in C_1, c_2 \in C_2\}$$

también será un conjunto convexo. Finalmente, si una función $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ es **cóncava**¹⁰, entonces dado $x_0 \in C$ y dados

$$x, y \in \Gamma_{x_0} = \{z \in C \mid f(x_0) \leq f(z)\}$$

se tiene que

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \geq \lambda f(x_0) + (1 - \lambda)f(x_0) = f(x_0),$$

razón por la cual Γ_{x_0} es un conjunto convexo. En otras palabras, la cóncavidad de la función f implica la convexidad de las llamadas **secciones inferiores** (Γ_{x_0}) asociadas a f .

¹⁰Recordemos que $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ es cóncava si para todo $x, y \in C$ y para todo $\lambda \in [0, 1]$ se cumple que $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

Teorema 2.4 Teorema de Separación de Hahn - Banach.

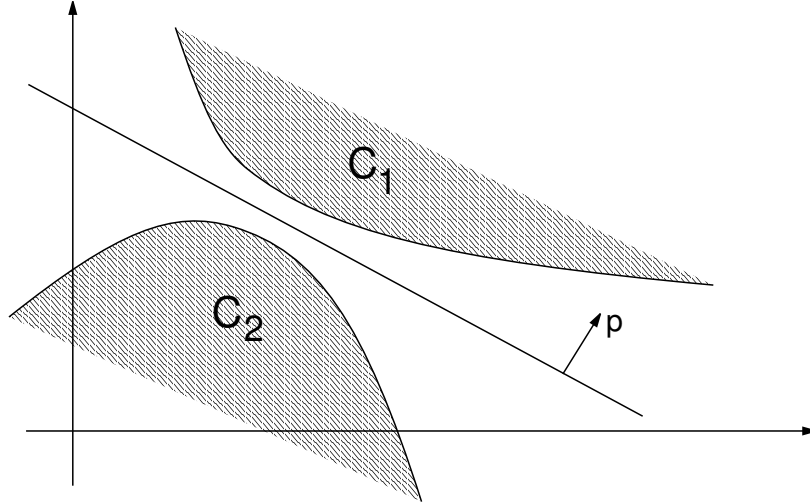
Sean C_1 y $C_2 \subseteq \mathbb{R}^\ell$ dos convexos tales $\text{int}C_1 \neq \emptyset$ y además $\text{int}C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Existe entonces un vector $p \in \mathbb{R}^\ell$, $p \neq 0$, tal que para todo $c_1 \in C_1$, $c_2 \in C_2$,

$$p \cdot c_1 \leq 0, \quad p \cdot c_2 \geq 0,$$

de lo cual se tiene que

$$p \cdot c_1 \leq p \cdot c_2, \quad \forall c_1 \in C_1, \quad c_2 \in C_2.$$

La idea detrás del teorema es muy simple, tal como se ilustra en la siguiente figura



Dados dos convexos cerrados como en la figura (la intersección de uno con el interior del otro es vacía, de hecho, la intersección de ambos es vacía), cada uno de ellos está en **uno de los lados** del hiperplano generado por el vector $p \neq 0$. En la figura, C_1 está a la derecha (por arriba) del hiperplano (recta en la figura), mientras que C_2 está a la izquierda (por abajo) del hiperplano. En este caso se dice que p **separa** los conjuntos convexos.

Como caso particular de lo anterior, si C_1 es un convexo con interior no vacío y c_0 es cualquier punto que no está en el interior de C_1 , se puede aplicar el Teorema de Hahn - Banach a los conjuntos C_1 y $C_2 = \{c_0\}$, con lo cual existirá un vector $p \neq 0$ tal que para todo $c_1 \in C_1$

$$p \cdot c_0 \leq p \cdot c_1.$$

Teorema 2.5 Supongamos que las funciones de utilidad son continuas, crecientes por componentes y estrictamente cóncavas. Supongamos además que para cada $i \in I$, $\omega_i \in \mathbb{R}_{++}^\ell$. Entonces, si (x_i^*) es un óptimo de Pareto tal que $x_i^* \in \mathbb{R}_{++}^\ell$. Existe entonces un precio $p^* \in \Delta$ tal que x_i^* es una asignación de equilibrio a dicho precio.

Prueba. Dado x_i^* , definamos

$$\Gamma_i = \{x \in \mathbb{R}_+^\ell \mid u_i(x_i^*) < u_i(x)\}, \quad \Gamma = \sum_{i \in I} \Gamma_i.$$

Por estricta cóncavidad (en rigor, sólo por concavidad) de u_i se tiene que Γ_i es un conjunto convexo y luego Γ también lo es. Veamos que $\omega \notin \Gamma$. En caso contrario, tendríamos que existe $x'_i \in \Gamma_i$ (es

decir, $u_i(x_i^*) < u_i(x_i')$) tal que $\omega = \sum_{i \in I} x_i'$, lo que contradice la Paretianidad de (x_i^*) . Por lo tanto, considerando que $C_1 = \{\omega\}$ y $C_2 = \Gamma$ son convexos tales que $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, aplica entonces el Teorema de Separación de Hahn - Banach, por lo cual existe $p^* \in \mathbb{R}^\ell$ tal que $p^* \cdot \omega \leq p^* \cdot \sum_{i \in I} x_i$, para todo $x_i \in \Gamma_i$. Dado ahora e_k el k -vector de la base canónica de \mathbb{R}^ℓ , es claro que para cada $i = 1, 2, \dots, m$, $u_i(x_i^* + \frac{e_k}{m}) > u_i(x_i^*)$ (monotonía estricta de las preferencias). Por lo tanto, para cada $k = 1, 2, \dots, \ell$

$$\sum_{i \in I} \left[x_i^* + \frac{e_k}{m} \right] = \omega + e_k \in \Gamma$$

por lo que

$$p^* \cdot \omega \leq p^* \cdot (\omega + e_k) \Rightarrow p^* \cdot e_k = p_k^* \geq 0,$$

es decir, que $p^* \in \mathbb{R}_+^\ell$. Ahora, por Hahn-Banach sabemos que $p^* \neq 0_{\mathbb{R}^\ell}$, lo que finalmente implica que p^* puede ser asumido en el Simplex.

Dado $i_0 \in I$, supongamos que existe x'_{i_0} tal que (a) $u_{i_0}(x'_{i_0}) > u_{i_0}(x_{i_0}^*)$, con (b) $p^* \cdot x'_{i_0} \leq p^* \cdot x_{i_0}^*$. A partir de (a), veamos entonces que existe $\epsilon > 0$ tal que $u_{i_0}(x'_{i_0} - \epsilon e) > u_{i_0}(x_{i_0}^*)$, con $e = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^\ell$. En caso contrario, para todo $\epsilon > 0$ se tendría que $u_{i_0}(x'_{i_0} - \epsilon e) \leq u_{i_0}(x_{i_0}^*)$. Considerando entonces $\epsilon \rightarrow 0$, de la continuidad de u_{i_0} se tiene que $u_{i_0}(x'_{i_0}) \leq u_{i_0}(x_{i_0}^*)$, lo que, por hipótesis, no es posible. De esta manera, para algún $\epsilon > 0$ se tiene que $\bar{x}_{i_0} = x'_{i_0} - \epsilon e \in \Gamma_{i_0}$. Para $i \neq i_0$ definamos entonces \bar{x}_i como

$$\bar{x}_i = x_i^* + \frac{\epsilon e}{2(m-1)}.$$

Dada la monotonicidad de u_i para cada $i \in I$, es claro que $\bar{x}_k \in \Gamma_k$. Por lo tanto,

$$p^* \cdot \sum_{i \in I} \bar{x}_i = p^* \cdot x'_{i_0} + \sum_{i \neq i_0} p^* \cdot x_i^* - \frac{\epsilon}{2} \geq p^* \cdot \omega$$

Pero $p^* \cdot x'_{i_0} \leq p^* \cdot x_{i_0}^*$. Por lo tanto,

$$p^* \cdot \sum_{i \in I} x_i^* - \frac{\epsilon}{2} \geq p^* \cdot x'_{i_0} + \sum_{i \neq i_0} p^* \cdot x_i^* - \frac{\epsilon}{2} \geq p^* \cdot \omega$$

es decir,

$$p^* \cdot \omega - \frac{\epsilon}{2} \geq p^* \cdot \omega,$$

lo que obviamente es una contradicción. En consecuencia, no puede existir ningún elemento x'_i tal que $p^* \cdot x'_i \leq p^* \cdot x_i^*$, con $u_i(x'_i) > u_i(x_i^*)$. Esto equivale a decir que x_i^* es el máximo de la función de utilidad sobre todos los elementos x tales que $p^* \cdot x \leq p^* \cdot x_i^*$, es decir, en el conjunto presupuestario $B(p^*, x_i^*)$. En otras palabras, (x_i^*) es una asignación de equilibrio al precio p^* cuando las dotaciones iniciales son precisamente los x_i^* , que obviamente conforman una reasignación de las dotaciones iniciales de la economía. \square

Ejemplo 2.5 Determinación de los óptimos de Pareto de una economía

Para un modelo de intercambio de 2×2 es posible identificar los óptimos de Pareto de la economía. Por definición, en la caja de Edgeworth de 2×2 el conjunto de los óptimos de Pareto conforman lo que se denomina **curva de contrato**.

Determinar los óptimos de Pareto (y por ende la curva de contrato) en una economía de dos por dos es relativamente simple. La idea es como sigue. Dadas las funciones de utilidad u_1 y u_2 , podemos concebir entonces una **función de utilidad de la sociedad** simplemente como la suma ponderada de las funciones de utilidad de los individuos, es decir, de la forma

$$u_1 + \lambda u_2$$

con $\lambda > 0$ alguna constante (que en principio podría ser uno). Dado esto, consideremos el siguiente problema de optimización:

$$\begin{cases} \max & u_1(x_{11}, x_{12}) + \lambda u_2(x_{21}, x_{22}) \\ \text{s.a} & x_{11} + x_{21} = \omega_{11} + \omega_{21} \\ & x_{12} + x_{22} = \omega_{12} + \omega_{22} \end{cases}$$

Supongamos que resolvemos este problema de optimización, siendo las soluciones $x_{11}^*, x_{12}^*, x_{21}^*$ y x_{22}^* . En primer lugar, estas asignaciones de consumo **son factibles**, ya que cumplen con la restricción del problema

$$x_{11}^* + x_{21}^* = \omega_{11} + \omega_{21}$$

$$x_{12}^* + x_{22}^* = \omega_{12} + \omega_{22}.$$

En segundo lugar, veamos que esta asignación anterior es un óptimo de Pareto. En efecto, si existiese otra asignación factible, digamos $x'_{11}, x'_{12}, x'_{21}, x'_{22}$, tal que mejora estrictamente a un individuo (digamos al uno) manteniendo al otro igual o mejor de lo que estaba originalmente (al tipo dos), es decir, $u_1(x'_{11}, x'_{12}) > u_1(x_{11}^*, x_{12}^*)$ (mejora estrictamente al uno) y $u_2(x'_{21}, x'_{22}) \geq u_2(x_{21}^*, x_{22}^*)$ (mejora o mantiene igual al tipo dos), entonces se tendría que

$$u_1(x'_{11}, x'_{12}) + \lambda u_2(x'_{21}, x'_{22}) > u_1(x_{11}^*, x_{12}^*) + \lambda u_2(x_{21}^*, x_{22}^*)$$

lo que es una contradicción con el hecho que $x_{11}^*, x_{12}^*, x_{21}^*$ y x_{22}^* maximizaba la función $u_1 + \lambda u_2$ en el conjunto de las asignaciones factibles. Por lo tanto hemos probado que los óptimos de Pareto de la economía provienen de resolver el problema de optimización

$$\begin{cases} \max & u_1(x_{11}, x_{12}) + \lambda u_2(x_{21}, x_{22}) \\ \text{s.a} & x_{11} + x_{21} = \omega_{11} + \omega_{21} \\ & x_{12} + x_{22} = \omega_{12} + \omega_{22} \end{cases}$$

donde $\lambda > 0$ es un parámetro arbitrario.

Desarrollemos entonces las condiciones de optimalidad del problema. Para ello, notemos que al definir $\omega_1 = \omega_{11} + \omega_{21}$ y $\omega_2 = \omega_{12} + \omega_{22}$: dotaciones totales de bienes uno y dos, y haciendo el reemplazo $x_{21} = \omega_1 - x_{11}$ y $x_{22} = \omega_2 - x_{12}$, el problema de optimización anterior corresponde a

$$\max_{x_{11}, x_{12}} u_1(x_{11}, x_{12}) + \lambda u_2(\omega_1 - x_{11}, \omega_2 - x_{12}).$$

Así, derivando c.r a las variables, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1(x_{11}, x_{12})}{\partial x_{11}} + \lambda \frac{\partial u_2(\omega_1 - x_{11}, \omega_2 - x_{12})}{\partial x_{11}} &= 0 \Leftrightarrow \\ \frac{\partial u_1(x_{11}, x_{12})}{\partial x_{11}} + \lambda \frac{\partial u_2(\omega_1 - x_{11}, \omega_2 - x_{12})}{\partial x_{21}} \cdot (-1) &= 0 \end{aligned}$$

lo que corresponde a decir que (deshacer el reemplazo)

$$\frac{\partial u_1(x_{11}, x_{12})}{\partial x_{11}} = \lambda \frac{\partial u_2(x_{21}, x_{22})}{\partial x_{21}}.$$

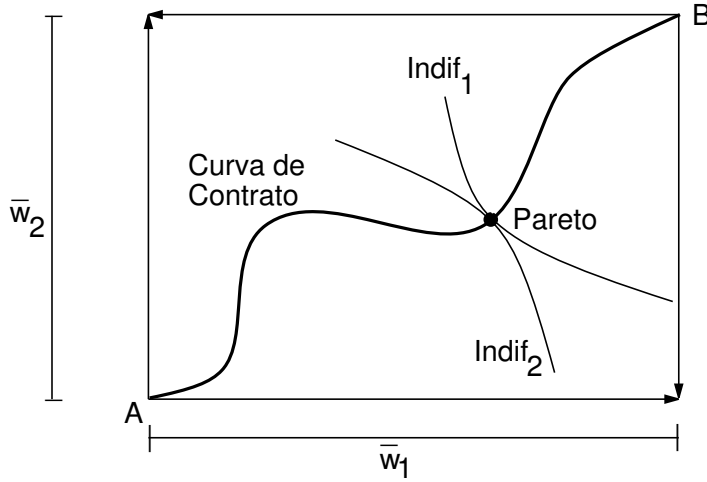
Análogamente para la segunda variable, se tiene

$$\frac{\partial u_1(x_{11}, x_{12})}{\partial x_{12}} = \lambda \frac{\partial u_2(x_{21}, x_{22})}{\partial x_{22}},$$

por lo que, finalmente, en el óptimo de Pareto ocurre

$$\nabla_{x_{11}, x_{12}} u_1(x_{11}^*, x_{12}^*) = \lambda \nabla_{x_{21}, x_{22}} u_2(x_{21}^*, x_{22}^*),$$

es decir, los gradientes de las funciones de utilidad son proporcionales (es decir, linealmente dependientes!), lo que es equivalente a decir que las curvas de indiferencia son tangentes en los óptimos de Pareto. Precisamente esta propiedad es la que caracteriza la curva de contrato: son todos aquellos puntos de la caja de Edgeworth donde las curvas de indiferencia son tangentes. La siguiente figura ilustra lo anterior



Para ilustrar lo anterior, supongamos que las funciones de utilidad de dos individuos son $u_1(x, y) = xy$ y $u_2(x, y) = x^2y$. Las dotaciones iniciales serán $\omega_1 = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ y $\omega_2 = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$. Luego, la dotación total es $\omega = (3, 2)$.

Para encontrar el (los) óptimos de Pareto, debemos encontrar todos aquellos puntos de la caja de Edgeworth donde el gradiente de las utilidades es l.d. Para efectos del cálculo, note que las variables deben ser expresadas en el mismo sistema coordenado. Así, si (x, y) denota una canasta para el individuo 1 entonces, $(3 - x, 2 - y)$ denota aquella correspondiente para el individuo 2. Luego, un óptimo de Pareto ha de satisfacer la siguiente condición:

$$\nabla u_i(x, y) = \lambda \nabla u_2(3 - x, 2 - y)$$

es decir¹¹,

$$(y, x) = -\lambda(2(3 - x)(2 - y), (3 - x)^2)$$

de lo cual se tiene que

$$\frac{y}{x} = \frac{2(2 - y)}{3 - x}$$

¹¹Calcular las derivadas parciales de u_1 y u_2 c.r a sus variables y evaluar en el punto indicado anteriormnente, es decir, (x, y) para 1 y $(3 - x, 2 - y)$ para 2.

es decir,

$$y = \frac{4x}{x+3}, \quad 0 \leq x \leq 3.$$

Luego, por ejemplo, $x_1^* = (2, \frac{4 \cdot 2}{2+3}) = (2, \frac{8}{5})$ y $x_2^* = (3-2, 2-\frac{8}{5}) = (1, \frac{2}{5})$ es un óptimo de Pareto para la economía. Note que, respecto del sistema coordinado del primer individuo, la curva de contrato es

$$y = \frac{4x}{x+3}, \quad 0 \leq x \leq 3.$$

Ejemplo 2.6 Considere una economía de intercambio con dos bienes y dos consumidores. Las dotaciones iniciales son $\omega_1 = (10, 2)$ para el individuo uno y $\omega_2 = (2, 10)$ para el individuo dos. Las funciones de utilidad de ambos son idénticas, dadas por $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$, con $0 < \alpha < 1$. Dado esto, es fácil ver que el precio de equilibrio en esta economía es

$$(1, p^*) \in \mathbb{R}^2 \mid p^* = \frac{1-\alpha}{\alpha},$$

y que las respectivas asignaciones de equilibrio son

$$\text{Individuo uno : } x_{11}^* = x_{12}^* = \alpha 10 + (1-\alpha)2$$

$$\text{Individuo dos : } x_{21}^* = x_{22}^* = \alpha 2 + (1-\alpha)10.$$

De hecho, en este caso es claro que al precio de equilibrio p^* como antes, el “ingreso” de los individuos uno y dos es

$$I_1^* = 10 + \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot 2 \quad I_2^* = 2 + \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot 10$$

respectivamente. Así, por ejemplo, el individuo uno “es más rico” que el dos siempre y cuando

$$10 + \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot 2 > 2 + \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot 10 \Rightarrow 8 > \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) 8 \Rightarrow \frac{1-\alpha}{\alpha} < 1$$

lo que se tiene si $\alpha < 1/2$. Supongamos entonces que el individuo uno es más rico que el individuo dos, pero que esta situación no es deseable. Así, nos hemos convencido que se requiere una intervención en el mercado de modo que la desigualdad de ingresos sea reducida. De hecho, supongamos que se desea intervenir la economía de modo que la razón de ingresos sea igual a un valor prefijado $\rho > 0$ (por ejemplo, igualitario si $\rho = 1$). Para implementar esto, sabemos *ex ante* que la solución necesariamente será un óptimo de Pareto, es decir, un punto de la curva de contrato. Identifiquemos entonces el punto en cuestión. Para encontrar la curva de contrato, se debe resolver el siguiente problema de optimización ($\lambda > 0$ arbitrario):

$$\max x_{11}^\alpha x_{21}^{1-\alpha} + \lambda x_{21}^\alpha x_{22}^{1-\alpha} \quad \text{s.a.} \quad x_{11} + x_{21} = 12, \quad x_{12} + x_{22} = 12,$$

lo que deriva en

$$\max_{x_{11}, x_{12}} x_{11}^\alpha x_{21}^{1-\alpha} + \lambda [12 - x_{11}]^\alpha [12 - x_{12}]^{1-\alpha}.$$

Derivando e igualando a cero se tiene que (llamemos $x = x_{11}$, $y = x_{12}$)

$$\text{c.r a x } \alpha x^{\alpha-1} y^{1-\alpha} + \lambda [\alpha \cdot (-1) \cdot [12 - x]^{\alpha-1} [12 - y]^{1-\alpha}] = 0$$

$$\text{c.r a y } (1-\alpha) x^\alpha y^{-\alpha} + \lambda [(1-\alpha) \cdot (-1) \cdot [12 - x]^\alpha [12 - y]^{-\alpha}] = 0$$

con lo cual,

$$\frac{\alpha x^{\alpha-1} y^{1-\alpha}}{(1-\alpha)x^\alpha y^{-\alpha}} = \frac{\lambda[\alpha \cdot [12-x]^{\alpha-1}[12-y^{1-\alpha}]]}{\lambda[(1-\alpha) \cdot [12-x]^\alpha[12-y^{-\alpha}]]}$$

lo que finalmente implica que

$$\frac{y}{x} = \frac{12-y}{12-x} \Rightarrow 12y - xy = 12x - xy \Rightarrow x = y.$$

Por lo tanto, la curva de contrato son todos aquellos puntos de la caja de Edgeworth que cumplen con lo anterior, es decir, la diagonal de la caja. Para determinar el precio que descentraliza un óptimo de Pareto cualquiera, recordemos que la condición que cumple cualquier punto de la curva de contrato es que las curvas de indiferencia son tangentes entre sí en dicho punto, razón por la cual la recta presupuestaria que pase por dicho óptimo de Pareto es tangente a la curva de indiferencia. Esto equivale a decir que el gradiente de la función de utilidad debe ser paralelo al vector ortogonal de la recta presupuestaria, es decir, que **el gradiente de la función de utilidad de cada individuo en el punto óptimo de Pareto es paralelo al precio que descentraliza**. Por lo tanto, normalizando el gradiente de la función de utilidad de modo que la primera componente sea uno, se tiene que la segunda componente del precio que descentraliza es simplemente el cociente de las derivadas parciales de la función de utilidad en el óptimo de Pareto, es decir, la relación marginal de sustitución en dicho punto. En el ejemplo, la función de utilidad del individuo uno es $u_1(x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$, por lo que gradiente es

$$\nabla u_1(x, y) = (\alpha x^{\alpha-1} y^{1-\alpha}, (1-\alpha)x^\alpha y^{-\alpha})^t \in \mathbb{R}^2,$$

con lo que el vector gradiente normalizado es¹²

$$\left(1, \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{y}{x}\right)^t \in \mathbb{R}^2.$$

Para terminar, el valor anterior debe ser evaluado en el óptimo de Pareto que deseamos descentralizar. En este caso, los óptimos de Pareto son tal que $x = y$, razón por la cual el precio que descentraliza es

$$\bar{p} = \left(1, \frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^t \in \mathbb{R}^2,$$

que en este ejemplo **no depende del Pareto considerado**: el precio que descentraliza todos los óptimos de Pareto es el mismo, que de hecho es el precio de equilibrio. Para terminar entonces con la pregunta, todo el asunto está en encontrar un óptimo de Pareto tal que la razón de ingresos entre el individuo uno y dos sea ρ , es decir, busquemos el punto de la forma (\bar{x}, \bar{x}) (todos los óptimos de Pareto están en la diagonal!) tal que $\bar{p} \cdot (\bar{x}, \bar{x})$ (ingreso del individuo uno) dividido por $\bar{p} \cdot (12 - \bar{x}, 12 - \bar{x})$ (ingreso del individuo dos)¹³ sea igual a ρ , es decir,

$$\frac{\bar{x} + \frac{1-\alpha}{\alpha} \bar{x}}{(12 - \bar{x}) + \frac{1-\alpha}{\alpha} (12 - \bar{x})} = \frac{\bar{x}}{12 - \bar{x}} = \rho \Rightarrow \bar{x} = \frac{12\rho}{1 + \rho}.$$

En resumen, para cumplir con el objetivo de equidad indicado, se debe entonces alcanzar el óptimo de Pareto

$$\bar{x}_1 = \left(\frac{12\rho}{1 + \rho}, \frac{12\rho}{1 + \rho}\right), \quad \bar{x}_2 = \left(12 - \frac{12\rho}{1 + \rho}, 12 - \frac{12\rho}{1 + \rho}\right),$$

¹²Debemos hacer aparecer un uno en la primera componente, lo que se logra dividiendo por la derivada parcial c.r a x .

¹³Recordar que si el individuo uno tiene \bar{x} del bien uno, el tipo dos tiene $12 - \bar{x}$; análogo con bien dos.

el que es descentralizado por el precio de equilibrio p^* ya encontrado. Ahora, para “implementar” el Pareto anterior, la idea es determinar una transferencia de tal forma que las dotaciones finales yazcan en la recta presupuestaria definida por el precio p^* y que pasa por el Pareto anterior. La ecuación de esta recta es

$$x + \frac{1-\alpha}{\alpha}y = \frac{12\rho}{1+\rho} + \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{12\rho}{1+\rho} = \frac{12\rho}{\alpha(1+\rho)}.$$

Por lo tanto, si la transferencia del individuo uno es $T_1 = (T_{11}, T_{12})$, la dotación de bienes del individuo uno ex post la transferencia es $10 - T_{11}$ del bien uno y $2 - T_{12}$ del bien dos. Luego, para que la dotación final seté en la recta presupuestaria anterior se debe cumplir que

$$10 - T_{11} + \frac{1-\alpha}{\alpha}(2 - T_{12}) = \frac{12\rho}{1+\rho} + \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{12\rho}{1+\rho}.$$

Por ejemplo, si $T_{12}^* = 1$ queda entonces que

$$10 - T_{11} + \frac{1-\alpha}{\alpha} = \frac{12\rho}{\alpha(1+\rho)} \quad T_{11}^* = 10 + \frac{1-\alpha}{\alpha} - \frac{12\rho}{\alpha(1+\rho)}$$

Con esto, y a modo de resumen, una forma de para lograr el objetivo de redistribución de ingreso solicitado, consiste en que al individuo uno le quitemos T_{11}^* del bien uno y $T_{12}^* = 1$ del bien dos, y que esto sea entregado al individuo dos. Note finalmente que existen muchas opciones de hacer los traspasos con el fin de cumplir con el objetivo social indicado. \square

2.7 El núcleo de la economía

En lo que sigue vamos a definir el concepto de **núcleo** de una economía. Para ello, se requieren de algunos conceptos previos que pasamos a definir.

Definición 2.6 Dado $I = \{1, 2, \dots, m\}$ una **coalición** de individuos será simplemente un conjunto $S \subseteq I$.

Definición 2.7 Dada una distribución factible $(x_i)_{i \in I} \in F$, diremos que una coalición $S \subseteq I$ **mejora dicha distribución** siempre y cuando exista otra distribución factible $(y_i)_{i \in I} \in F$ tal que

- (a) $\sum_{i \in S} y_i = \sum_{i \in S} \omega_i$
- (b) $u_i(x_i) < u_i(y_i), \forall i \in S$.

En palabras, una coalición mejora una determinada asignación si es posible encontrar otra asignación de recursos de tal forma que todos los miembros de dicho grupo están mejores con esta nueva asignación de recursos.

Definición 2.8 Diremos que una distribución factible $(x_i^*)_{i \in I} \in F$ está en el **núcleo** de la economía siempre y cuando **no existe ninguna coalición que la mejore**. El núcleo de la economía será denotado por \mathcal{C} .

En palabras, una asignación está en el núcleo si no existe ninguna otra asignación de recursos que mejore estrictamente a todos los miembros de algún sub-grupo de individuos.

Proposición 2.9 Toda distribución en el núcleo es Pareto optimal e individualmente racional.

Prueba. Sea $(x_i^*)_{i \in I} \in \mathcal{C}$. Veamos que es individualmente racional. En efecto, si fuera que para algún $k \in I$, $x_k^* \prec_k \omega_k$, entonces la coalición definida por $S = \{k\}$ mejora estrictamente la distribución original.

Veamos que es Pareto. Si no lo fuera, entonces existirá una distribución factible $(x'_i)_{i \in I}$ tal que $u_i(x_i^*) \leq u_i(x'_i)$, $\forall i \in I$, con $u_{i_0}(x_{i_0}^*) < u_{i_0}(x'_{i_0})$. Luego, la coalición $S = \{i_0\}$ mejora la distribución inicial, lo que no es posible pues se encuentra en el núcleo. \square

Proposición 2.10 *Toda distribución de equilibrio está en el núcleo de la economía.*

Prueba. Sea $p^* \in \text{int}\Delta$ un precio de equilibrio y sea x_i^* , $i \in I$, la correspondiente distribución de equilibrio. Supongamos entonces que dicha distribución no está en \mathcal{C} . Sabemos entonces que existe una coalición $S \subseteq I$, $S \neq \emptyset$, y una distribución factible que la mejora. Sea entonces (y_i) , $i \in I$, tal que

$$\text{a.- } \sum_{i \in S} y_i = \sum_{i \in S} \omega_i$$

$$\text{b.- } u_i(x_i^*) < u_i(y_i), \forall i \in S.$$

De la condición [b.-], se tiene que $p^* \cdot \omega_i < p^* \cdot y_i$, $\forall i \in S$, pues en caso contrario se tendría que $y_i \in B_i(p^*, \omega_i)$ y con ello $u_i(y_i) \leq u_i(x_i^*)$, $i \in S$. Luego, utilizando la condición [a.-], al multiplicar por p^* se tiene que

$$p^* \cdot \sum_{i \in S} y_i = p^* \cdot \sum_{i \in S} \omega_i$$

lo cual no puede ser pues ya sabíamos que $p^* \cdot \omega_i < p^* \cdot y_i$, $i \in S$ y con ello $p^* \cdot \sum_{i \in S} y_i < p^* \cdot \sum_{i \in S} \omega_i$. \square

De las Proposiciones 2.9 y 2.10 se tiene directamente el siguiente resultado.

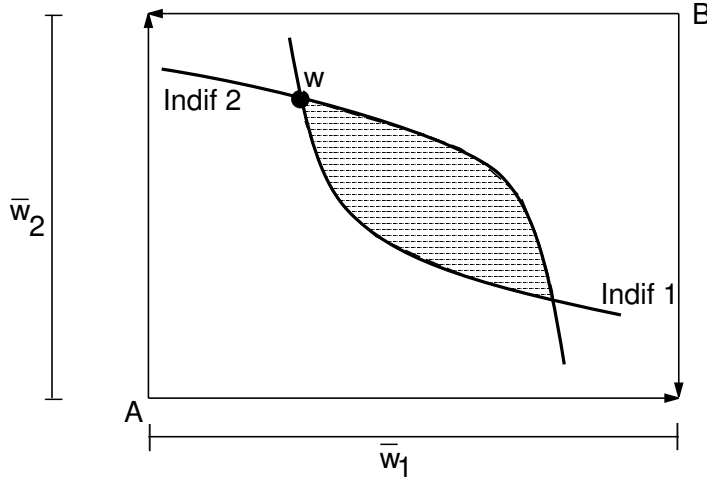
Proposición 2.11 *Todo distribución de equilibrio es individualmente racional y óptimo de Pareto.*

Prueba. Inmediata.

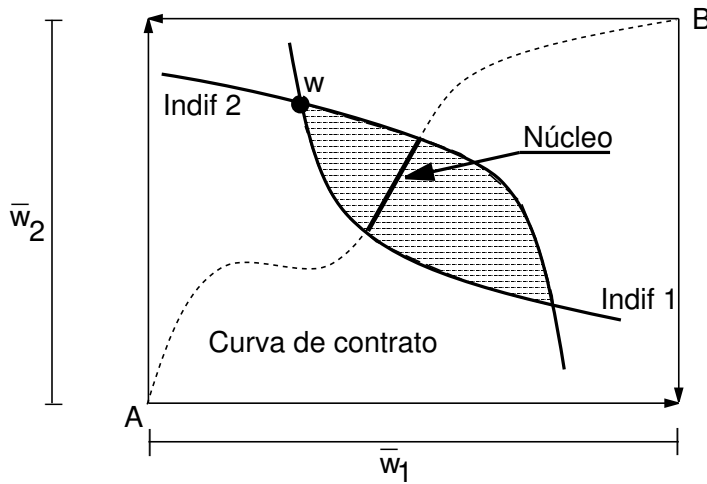
Ejemplo 2.1 El núcleo y la caja de Edgeworth

En lo que sigue vamos a ilustrar el núcleo de una economía utilizando la caja de Edgeworth. Para ello, en primer lugar notemos que toda distribución que está en el núcleo es Pareto óptima, luego ha de estar en la curva de contrato.

Por otro lado, el conjunto de puntos que son estrictamente preferidos a las dotaciones iniciales del individuo $i = 1, 2$ están por sobre la curva de indiferencia que pasa por la dotación inicial del individuo $i = 1, 2$. En consecuencia, la región que es encerrada por las dos curvas de indiferencia que pasan por la dotación inicial define todos aquellos puntos que son estrictamente preferidos a las dotaciones iniciales para ambos individuos. La siguiente figura ilustra la idea:



Por lo tanto, ya que los puntos del núcleo son óptimos de Pareto e individualmente racionales, se tiene que el núcleo de la economía corresponde a aquellos puntos de la curva de contrato que están en la región antes descrita. La siguiente figura ilustra entonces los puntos del núcleo.



Ejemplo 2.2 Siguiendo con el Ejemplo ??, dadas $u_1(x, y) = xy$ y $u_2(x, y) = x^2y$, y dotaciones iniciales $\omega_1 = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ y $\omega_2 = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, la curva de contrato está dada por la relación

$$y = \frac{4x}{x+3}, \quad 0 \leq x \leq 3.$$

Calculemos ahora el núcleo. Para ello debemos calcular las curvas de indiferencia que pasan por los puntos de dotación inicial dados anteriormente. Para el primer individuo, dicha curva está definida por todos aquellos puntos de la caja de Edgeworth tal que

$$x \cdot y = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Luego,

$$y = \frac{3}{4x}.$$

Con esto, la curva de indiferencia corta a la curva de contrato en el punto donde se satisfacen las ecuaciones:

$$y = \frac{4x}{x+3} \quad y = \frac{3}{4x} \Leftrightarrow 16x^2 - 3x - 9 = 0$$

cuyas soluciones son

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+576}}{2 \cdot 16} = \frac{3 \pm \sqrt{585}}{32}.$$

Puesto que $0 \leq x \leq 3$, la solución que nos sirve es la positiva, es decir,

$$x_a = \frac{3 + \sqrt{585}}{32}.$$

En forma análoga para el segundo individuo, la curva de indiferencia (expresada en coordenadas del primer individuo) corresponde al conjunto de puntos que cumple con

$$(3-x)^2 \cdot (2-y) = \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{27}{8}$$

de lo cual se tiene que la intersección con la curva de contrato está dada por aquel punto que resuelve la siguiente ecuación¹⁴

$$(3-x)^2 \cdot \left(2 - \frac{4x}{x+3}\right) = \frac{27}{8}.$$

Queda propuesto continuar con el problema e ilustrar geométricamente la situación.

3 Economía con producción

Definición 3.1 Se entenderá por **producción** cualquier proceso destinada a transformar ciertos bienes en otros diferentes de los originales.

En tal sentido, cuando se habla de *bienes diferentes* no sólo se hace referencia a cuestiones físicas que muestren un cambio evidente de las cualidades de los originales a los finales, sino que también se considera el hecho que los bienes tienen asociadas *características espaciales y temporales* que los pueden diferenciar. A modo de ejemplo, una naranja colocada en Santiago, el 13 de febrero de 1999, a las 13:45 hrs., es un bien distinto de la *misma* naranja¹⁵ colocado en Arica, el 14 de febrero a las 12:00.

A partir de lo anterior, se infiere que **dado** un proceso productivo, *existen dos tipos de bienes* que lo conforman: aquellos que serán transformados y aquellos que resultan de la transformación. Los primeros serán llamados **materias primas, inputs o factores** del proceso productivo, mientras que los segundos serán los **productos o bienes finales**. Para la producción de jugo de naranja, algunos de los factores podrían ser las naranjas, el agua, el edulcorante, el colorante, la mano de obra involucrada, etc; mientras que el producto final de esta etapa es el jugo de naranja. Siguiendo con este ejemplo, el mismo jugo de naranja podría perfectamente ser un factor para otro proceso productivo, por ejemplo, una pastelería que lo ocupe para fabricar queques de naranja.

En el modelo económico, las unidades básicas que llevan a cabo los procesos productivos son las **firmas o empresas**. Estas son las unidades mínimas que desempeñan tal labor, mientras que una agrupación de ellas que producen un *bien idéntico* se denominará **industria** del bien considerado.

¹⁴Recordar que $y = \frac{4x}{x+3}$.

¹⁵Es decir, del mismo bien desde el punto de vista de sus propiedades físicas.

Es necesario destacar que una firma, dados ciertos factores de producción, puede elaborar simultáneamente varios productos. En este caso general hablaremos de una firma *multiproducto* mientras que, cuando la firma produce un sólo bien, se dirá que es *monoproducto*.

Como veremos pronto, cada firma está *caracterizada* por lo que llamaremos su *tecnología* de producción. Esta simplemente define la manera que dicha empresa tiene para combinar los factores con el fin de elaborar su producto final. En todo lo que sigue, salvo que se diga expresamente, asumiremos que para una determinada firma, dicha **tecnología es dada** a priori.

En lo que sigue, supondremos que hay $n \in \mathbb{N}$ firmas en el mercado, las cuales serán indexadas por $j \in J \equiv \{1, 2, \dots, n\}$.

Definición 3.2 *Los bienes que la firma ofrece en el mercado serán denominados **productos** (output) de la firma, mientras que aquellos que son utilizados para la elaboración de los productos serán llamados **factores** (input) de la firma. Un **plan de producción** de una firma $j \in J$ será un vector $y_j \in \mathbb{R}^\ell$ cuyas componentes serán los factores y los productos que se pueden obtener de los mismos.*

Es obvio que los planes de producción de una firma dependen de cada una en particular, esto ya sea por el tipo de producto y factor que se utilice en el proceso mismo, como por la factibilidad técnica de obtener dichos productos a partir de los factores correspondientes. Note que, sin pérdida de generalidad podemos asumir que cada plan de producción debe estar en \mathbb{R}^ℓ , pues, por ejemplo, si para una firma $j \in J$ hay bienes que no son factores de ningún producto de la firma, entonces podemos asumir que en su proceso ocupa cero cantidad del mismo. Por otro lado, si para dicha firma hay un bien que no es parte de su oferta, entonces podemos asumir que lo produce en cantidad cero. Note finalmente que los factores y productos de una firma pueden ser completamente diferentes aquellos de otra firma.

Definición 3.3 *El conjunto de producción de una firma cualquiera se define como el conjunto de todos los planes de producción de la misma. Para una firma $j \in J$ será denotado por $Y_j \subseteq \mathbb{R}^\ell$.*

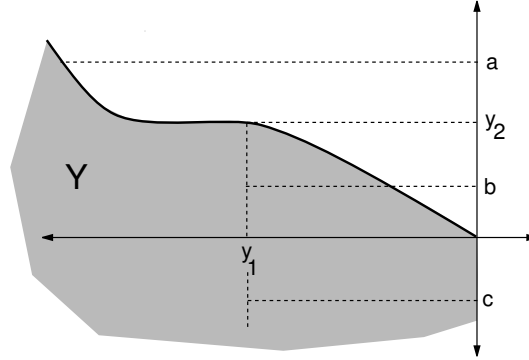
Por conveniencia y simplicidad de lo que sigue, de ahora en adelante dado un plan de producción de una firma $j \in J$, quedarán claramente identificados los bienes que serán factores y los bienes que serán productos. Dado un plan de producción de una firma $j \in J$, digamos $y_j \in Y_j$, asumiremos que las primeras componentes del vector corresponderán a los factores de producción, cuyas cantidades serán negativas, mientras que las componentes finales del mismo serán los productos, que de ser bienes en la economía serán expresados por cantidades positivas¹⁶. De esta manera, dado $y_j \in Y_j$ se tiene que

$$y_{jk} = \begin{cases} > 0 & \text{si bien } k \in L \text{ es un producto} \\ < 0 & \text{si bien } k \in L \text{ es un factor.} \end{cases}$$

Nota 3.1 *Se insiste en que si un producto $k \in L$ es un mal, puede tener valor negativo, lo que no significa que sea un factor. De hecho, para evitar cualquier confusión con esto, para cada firma $j \in J$ podemos asumir (y definir) a priori qué bienes serán productos y cuales serán factores. Para ello, bastaría definir un conjunto $F_j \subseteq L, F_j \neq \emptyset$, de índices que correspondan a los factores de la firma y otro conjunto $P_j \subseteq L, P_j \neq \emptyset$, que denota los productos de la firma (bienes o males). No procederemos de esta forma, asumiendo que en el contexto siempre es claro el rol de cada bien dentro del proceso productivo.*

¹⁶Si los productos corresponden a **males** de la economía, asumiremos que tienen valor negativo, lo que no significa que sean factores. Esta diferencia siempre será clara en el contexto en que trabajemos.

Ejemplo 3.1 Ilustremos los conceptos anteriores para una firma que ocupa un factor y produce un producto. Por convención, asumiremos que la primera componente denota la cantidad del factor (eje X) mientras que la segunda aquella cantidad de producto que se puede elaborar con la cantidad de factor correspondiente.



La figura nos dice que dada una cantidad de factor $y_1 < 0$, es posible producir y_2 cantidad de producto, pero también b y c , siendo en el último caso una producción de males económicos. La figura nos dice además que con la cantidad de factor y_1 no es posible producir $a > 0$ cantidad del producto.

Definición 3.4 Diversos tipos de conjuntos de producción.

Diremos que un conjunto de producción $Y_j \subseteq \mathbb{R}^\ell$

a.- es **convexo** si es convexo, es decir, si para todo $y_j, y'_j \in Y_j$ y para todo $\lambda \in [0, 1]$ se tiene que

$$\lambda y_j + (1 - \lambda) y'_j \in Y_j.$$

b.- es **cerrado** si es cerrado, es decir, si para toda sucesión de elementos $y_j^n \in Y_j$ tal que $y_j^n \rightarrow y_j$ se tiene que $y_j \in Y_j$.

c.- cumple la **posibilidad de inacción** si $0_{\mathbb{R}^\ell} \in Y_j$ (es decir, hacer nada es un plan factible).

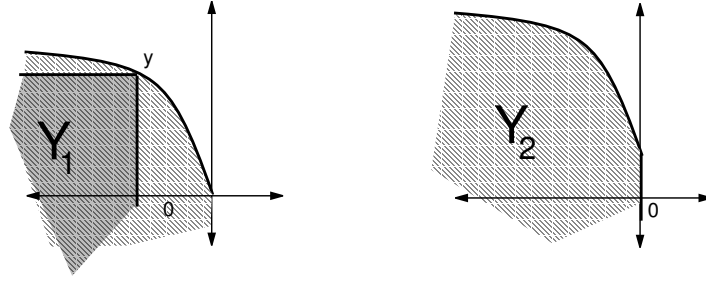
d.- satisface la condición de **imposibilidad de producción libre** si

$$Y_j \cap \mathbb{R}_+^\ell \subseteq \{0\}.$$

e.- cumple la propiedad de **libre eliminación** si

$$Y_j - \mathbb{R}_+^\ell \subseteq Y_j.$$

Ejemplo 3.2 La cerradura, la convexidad y la posibilidad de inacción de un conjunto de producción, son directas de interpretar y ver geoméricamente. La imposibilidad de producción libre nos dice un plan de producción que sólo tenga componentes positivas no es factible de ser elaborado (por eso la intersección es vacía), es decir, para producir algo positivo se necesitan factores: nada sale de la nada. La libre disposición nos dice que si tenemos un plan de producción factible, entonces al ocupar más factores (es decir, aumentar las componentes negativas) sigue siendo posible producir lo mismo que ya se elaboraba con los factores originales. En otras palabras, dado un plan de producción $y_j \in Y_j$, entonces al sumar un vector de componentes negativas el resultado sigue siendo factible. La siguiente figura ilustra los conceptos anteriores:



En la figura, el conjunto Y_1 es cerrado, convexo, satisface la imposibilidad de producción libre, la posibilidad de inacción y la hipótesis de libre disposición (desde cualquier punto de Y_1 , al dibujar el cuadrante negativo el conjunto resultante sigue estando en Y_1). El conjunto Y_2 no cumple la imposibilidad de producción libre, pues, por ejemplo, el punto del eje vertical donde ocurre la inflexión es uno donde hay cero factor pero producto positivo.

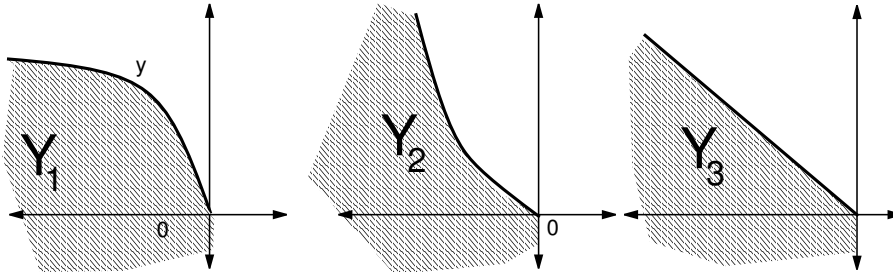
Definición 3.5 Retornos de escala

Diremos que un conjunto de producción $Y_j \subseteq \mathbb{R}^\ell$ presenta rendimientos crecientes de escala si para cualquier plan de producción $y_j \in Y_j$ se tiene que $ty_j \in Y_j$, para todo $t > 1$. Diremos además que dicho conjunto presenta rendimientos decrecientes de escala si para cualquier plan de producción $y_j \in Y_j$ se tiene que $ty_j \in Y_j$, para todo $0 < t < 1$. Finalmente, se dice que el conjunto de producción presenta rendimientos constantes de escala si tiene rendimientos crecientes y decrecientes a la vez.

Proposición 3.1 Un conjunto de producción $Y_j \subseteq \mathbb{R}^\ell$ convexo tal que $0 \in Y_j$ presenta rendimientos decrecientes de escala.

Prueba. Ejercicio.

Ejemplo 3.3 La siguiente figura ilustra los diversos tipos de rendimientos de escala.



Y_1 tiene rendimientos decrecientes, Y_2 crecientes mientras que Y_3 constantes. Se deja propuesto probar lo anterior.

3.1 Problema de la firma

Definición 3.6 Para una firma $j \in J$, dado un plan de producción $y_j \in Y_j$ y dado un precio $p \in \mathbb{R}^\ell$, el beneficio que la firma logra con dicho plan corresponde a

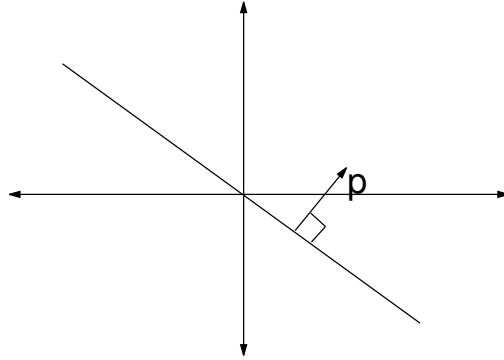
$$p \cdot y_j.$$

Nota 3.2 Note que,

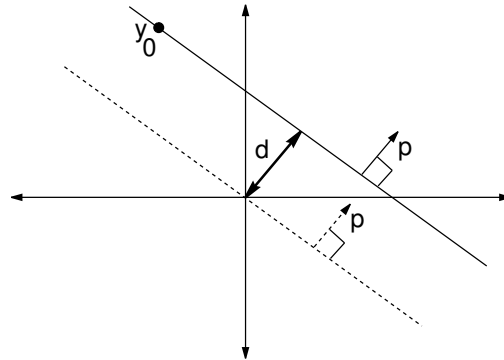
$$p \cdot y_j = \sum_{k=1}^{\ell} p_k y_{jk} = \sum_{k \in F_j} p_k y_{jk} + \sum_{k \in P_j} p_k y_{jk}$$

donde se cumple que para cada $k \in F_j$, $y_{jk} \leq 0$ mientras que $y_{jk} \geq 0$ si $k \in P_j$. Luego, $\sum_{k \in F_j} p_k y_{jk} \leq 0$ corresponde a los **costos** de los factores empleados, mientras que $\sum_{k \in P_j} p_k y_{jk} \geq 0$ nos entrega el **ingreso** por la venta de los bienes correspondientes. De esta manera, dada nuestra convención de signos, el producto interno del precio con el plan de producción nos entrega, en definitiva, el **beneficio** de la firma dado el plan de producción y_j y el precio $p \in \mathbb{R}^{\ell}$.

Ejemplo 3.4 Ilustremos geométicamente el beneficio de una firma dado un precio y dado un plan de producción cualquiera. Para ello, supongamos dado el conjunto de producción, digamos Y , y sea $y \in Y$. Dado el precio $p \in \mathbb{R}^{\ell}$, dibujemos la recta ortogonal al precio, recta que haremos pasar por el origen tal como muestra la siguiente figura:



Es claro que un vector $x \in \mathbb{R}^2$ está en la recta anterior siempre y cuando $p \cdot x = 0$ (la recta es, por definición, el conjunto de todos los valores ortogonales a $p \in \mathbb{R}^{\ell}$). Supongamos ahora que la recta es trasladada de tal forma que la obligamos a pasar por un punto y_0 dado a priori, tal como se muestra en la siguiente figura:



Entonces, debido a esta traslación la recta queda a una distancia d del origen. Dado todo lo anterior, notemos que la distancia d es simplemente la norma de la proyección del origen sobre la recta. Denotemos por v el vector ortogonal desde el origen a la recta. Luego, se cumple que $v = \lambda p$ (v es paralelo con p) y además, por la ortogonalidad de p a la recta, se cumple que

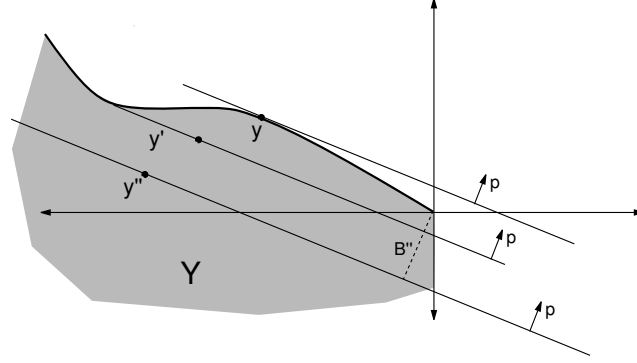
$$p \cdot (y_0 - v) = 0,$$

por lo que $p \cdot (y_0 - \lambda p) = 0$, es decir,

$$\lambda = \frac{p \cdot y_0}{\|p\|^2} \Rightarrow v = \frac{p \cdot y_0}{\|p\|^2} p = \left(\frac{p}{\|p\|} \cdot y_0 \right) \frac{p}{\|p\|} = (\hat{p} \cdot y_0) \hat{p} \Rightarrow d = \|v\| = |\hat{p} \cdot y_0|,$$

con $\hat{p} = \frac{p}{\|p\|}$. Es decir, el valor del producto punto entre \hat{p} con y_0 corresponde a la distancia que hay de la recta que define p trasladada hasta y_0 con el origen.

Aplicando lo anterior a conjuntos de producción, el beneficio que la firma obtiene con un plan de producción $y \in Y$ dado $p \in \mathbb{R}^l$, se ilustra en la siguiente figura:



Para el plan de producción $y'' \in Y$, el beneficio que obtendría la firma, dado el precio $p \in \mathbb{R}^l$, es B'' de la figura.

En todo lo que sigue vamos a asumir que el objetivo económico de cada firma es la maximización del beneficio económico.

Definición 3.7 El problema de la firma

Dado un precio $p \in \mathbb{R}^l$, el problema de una firma será el siguiente

$$\begin{cases} \max_{y_j} & p \cdot y_j \\ & y_j \in Y_j \end{cases}$$

□

En otras palabras, dado el precio $p \in \mathbb{R}^l$, asumiremos que cada firma busca dentro de los planes de producción factibles aquel que maximice su beneficio. Note que este es un problema de optimización con una función objetivo lineal ($p \cdot y$) y restricciones dadas por el conjunto de producción, las que a priori podrían tener cualquier forma. De hecho, debido a que el conjunto de producción no tiene por que ser compacto, a priori no tenemos garantía que la oferta de una firma exista. Ahora bien, aun cuando existiese oferta, tampoco tenemos garantía que esta sea única o multivarida.

Definición 3.8 Dado un precio $p \in \mathbb{R}^l$, si el problema de la firma tiene solución entonces dicha solución se llama llamada **oferta** de la firma. Si para un precio $p \in \mathbb{R}^l$ la solución es única, hablaremos de **función de oferta** de la firma. Por el contrario, si hay múltiples soluciones entonces tendremos lo que se denomina una **correspondencia de oferta** de la firma. Para una firma $j \in J$, dado $p \in \Delta$, cuando tenga sentido denotaremos la oferta de la firma (función o correspondencia) como $y_j(p)$. □

Proposición 3.2 Si existe la oferta $y_j(p)$ de la firma¹⁷, entonces para todo $y_j^*, y_j' \in y_j(p)$ se tiene que

¹⁷Sea esta una correspondencia o una función de los precios

$$p \cdot y_j^* = p \cdot y_j'.$$

Prueba. Sean $y_j^*, y_j' \in y_j(p)$. Entonces, por definición se cumple que $p \cdot y_j^* \geq p \cdot y_j'$, y además $p \cdot y_j' \geq p \cdot y_j^*$. Luego, ambas cantidades son iguales. Esto es válido si la oferta es unívoca o multivariada. \square

Notemos entonces que si la oferta de la firma está bien definida, podemos entonces hablar de la **función de beneficio** de la firma, la que simplemente es el valor de la función de beneficio en cualquier punto de la oferta.

Definición 3.9 Dado $p \in \mathbb{R}^l$ y dada la función (o correspondencia) de oferta de la firma $j \in J$, la función de beneficio de la misma se define como

$$\pi_j(p) = p \cdot y_j^*$$

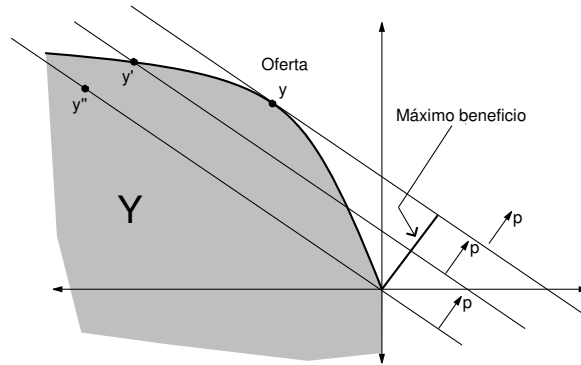
donde y_j^* es un punto cualquiera de la oferta.

Sin ningún tipo de ambigüedad, por lo anterior podemos denotar la función de beneficios de la firma como

$$\pi_j(p) = p \cdot y_j(p).$$

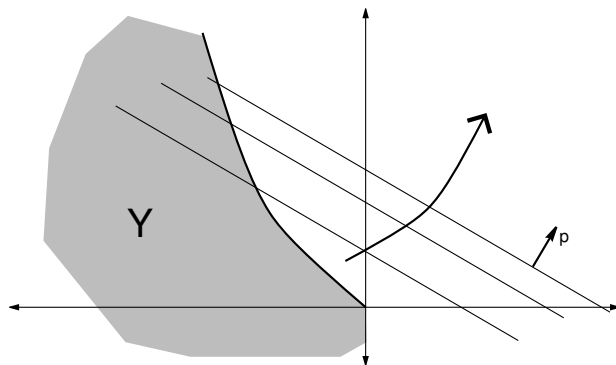
Ejemplo 3.5 Ilustración geométrica de oferta y máximo beneficio

Dado un precio $p \in \mathbb{R}^l$, la oferta de la firma será un punto del conjunto de producción donde la recta ortogonal al precio se encuentra lo más posible a la derecha. El valor del máximo beneficio estará dado por la distancia de dicha recta al origen. En la siguiente figura, dado $p \in \mathbb{R}^l$, se ilustra la oferta (que es única según la figura) y el máximo beneficio. Note que en y'' se tiene que el beneficio es cero.



Ejemplo 3.6 Ejemplo de no existencia de oferta

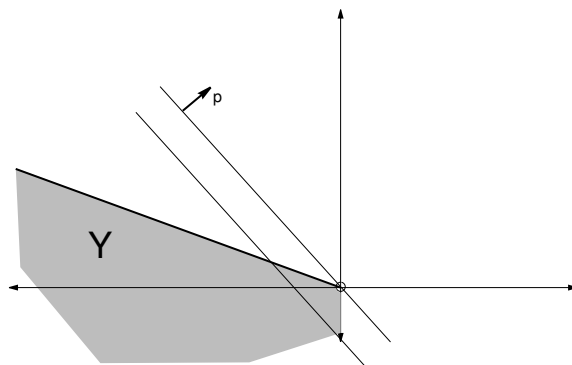
Para el siguiente conjunto de producción, la oferta no está bien definida pues dado p conviene que la recta ortogonal al precio se mueva lo más a la derecha posible, resultando en valores no acotados de máximo beneficio.



Lo que en rigor falla para la existencia de la oferta es que el conjunto es no convexo, presentando, como veremos, rendimientos crecientes de escala en la producción.

Ejemplo 3.7 Otro ejemplo de no existencia de oferta

Para el siguiente conjunto de producción, la oferta no está bien definida pues dado p , el problema de optimización no tienen solución dado que el candidato a oferta (que es cero en la figura) no es un punto factible (es decir, no está en el conjunto de producción).



El problema en el caso anterior es que el conjunto de producción no es cerrado.

Proposición 3.3 Si el conjunto de producción Y_j es tal que la oferta existe para $p \in \mathbb{R}^l$, entonces si Y_j es un conjunto cerrado con interior no vacío, dicha oferta necesariamente está en la frontera de Y_j .

Prueba. Sea $p \in \mathbb{R}^l$ y supongamos que la oferta correspondiente y^* es tal que $y^* \in \text{int}Y_j$. Existe entonces $\epsilon > 0$ tal que $\mathbf{B}(y^*, \epsilon) \subseteq Y_j$. Si el precio tiene sus componentes mayores o iguales a cero, sea entonces $\bar{y} = y^* + \frac{\epsilon}{2\sqrt{n}}e$, con $e = (1, 1, \dots, 1)$. De esta definición, es claro que $\bar{y} \in \mathbf{B}(y^*, \epsilon)$ y además cumple con que $p \cdot \bar{y} > p \cdot y^*$, cuestión que negaría el hecho que y^* es la oferta al precio p . Luego, necesariamente la oferta está en la frontera de Y_j . Ahora, si el precio es arbitrario, siempre se podrá escoger un $\bar{y} \in \mathbf{B}(y^*, \epsilon)$ tal que producto interno con p sea mayor que aquel con y^* , lo que obviamente es una contradicción con el hecho que y^* es la oferta. \square

Nota 3.3 En rigor, la proposición anterior es una consecuencia directa del hecho que al maximizar (optimizar) una función lineal sobre un convexo, la solución siempre es un punto extremal del mismo, puntos que a su vez son frontera del conjunto.

Definición 3.10 Dado $Y \subseteq \mathbb{R}^l$ un conjunto convexo con interior no vacío, diremos que es **estrictamente convexo** si para todo par de puntos en su frontera, digamos $y_1, y_2 \in \text{fr}Y$, se tiene que para todo $\lambda \in]0, 1[$

$$\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 \in \text{int}Y.$$

La idea de la estricta convexidad según lo anterior corresponde a conjuntos convexos que tienen tramos planos (rectos) en su frontera. La utilidad de este tipo de conjuntos es que si corresponden a conjuntos de producción para los cuales la oferta existe, entonces ella es única.

Proposición 3.4 *Si Y_j es un conjunto de producción cerrado, con interior no vacío y estrictamente convexo, entonces si la oferta existe para $p \in \Delta$, necesariamente es única.*

Prueba. Supongamos que hay dos ofertas al precio $p \in \Delta$, digamos y_1, y_2 . Por la Proposición 3.3 sabemos que $y_1, y_2 \in \text{fr}Y_j$. Además, de la Proposición 3.2, sabemos que $p \cdot y_1 = p \cdot y_2$. Por la estricta convexidad del conjunto, dado $\lambda \in]0, 1[$, ocurre que

$$y_\lambda = \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 \in \text{int}Y_j.$$

Luego, existe $\epsilon > 0$ tal que $\mathbf{B}(y_\lambda, \epsilon) \subseteq Y_j$. Sea entonces $\bar{y} = y_\lambda + \frac{\epsilon}{2\sqrt{n}}e$, con $e = (1, 1, \dots, 1)$. De esta definición, es claro que $\bar{y} \in \mathbf{B}(y_\lambda, \epsilon) \subseteq Y_j$ y además cumple con que $p \cdot \bar{y} > p \cdot y_\lambda = p \cdot [\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2] = p \cdot y_1$, lo que no es posible ya que y_1 (e y_2) son las ofertas. Luego, existe una única oferta. \square

Proposición 3.5 *Supongamos que Y_j es cerrado, convexo y $0_{\mathbb{R}^\ell} \in Y_j$. Entonces, dado $p \in \Delta$, $y_j(p)$ es un convexo cerrado tal que $py_j^* \geq 0, \forall y_j^* \in y_j(p)$.*

Prueba. Sea $p \in \Delta$ y supongamos que $y_j(p) \neq \emptyset$ (de ser vacío la propiedad es obvia, ya que \emptyset es cerrado y convexo). Habida cuenta que $y_j(p)$ es no vacío, veamos entonces que es convexo. En efecto, sean $y_1, y_2 \in y_j(p)$ y sea $\lambda \in [0, 1]$. Entonces, por convexidad de Y_j se tiene que

$$\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 \in Y_j.$$

Más aun, del hecho que $p \cdot y_1 = p \cdot y_2$, se tiene que $p \cdot [\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2] = \lambda p \cdot y_1 + (1 - \lambda)p \cdot y_2 = p \cdot y_1 (= p \cdot y_2)$. Luego, $\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 \in Y_j$ también maximiza $p \cdot y$ con $y \in Y_j$, es decir, $\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 \in y_j(p)$. Para ver la cerradura del conjunto $y_j(p)$, sea $y_n \in y_j(p)$ tal que $y_n \rightarrow y_0$. Como Y_j es cerrado, $y_0 \in Y_j$. Ahora, por definición se tiene que $p \cdot y_n \geq p \cdot y, \forall y \in Y_j$. Tomando límite sabemos que no se altera la desigualdad anterior, por lo cual $p \cdot y_0 \geq p \cdot y, \forall y \in Y_j$, es decir, $y_0 \in y_j(p)$, lo que prueba que $y_j(p)$ es cerrado. Finalmente, que $p \cdot y_j^* \geq 0$ para todo elemento en la oferta proviene directamente del hecho que $0_{\mathbb{R}^\ell} \in Y_j$, y luego, $p \cdot y_j^* \geq p \cdot 0_{\mathbb{R}^\ell} = 0$. \square

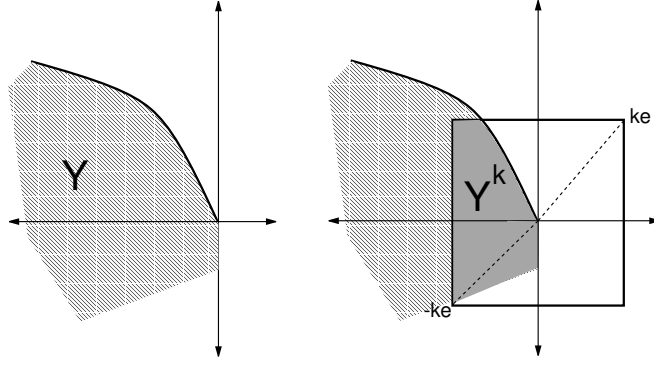
Nota 3.4 *La proposición anterior no nos dice que $y_j(p)$ sea no vacía ni continua en función de los precios (si fuera correspondencia, en vez de continuidad se considera la denominada semi continuidad superior, s.c.s). El problema surge, fundamentalmente, del hecho que Y_j no es compacto, por lo cual no podemos garantizar a priori que el problema de maximización de beneficio tenga solución en Y_j . La idea es entonces trabajar con conjuntos de producción restringidos, tal como pasamos a detallar.*

Definición 3.11 Sea $k > 0$ y sea $e = (1, 1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^\ell$. Dado Y_j , definamos entonces el conjunto de **producción restringido** de la siguiente forma

$$Y_j^k = \{y_j = (y_{jk}) \in Y_j \mid |y_{jk}| \leq k\} = Y_j \cap [-ke, ke]$$

donde $[-ke, ke]$ es un cubo en \mathbb{R}^ℓ cuya diagonal tiene por extremos ke y $-ke \in \mathbb{R}^\ell$.

La siguiente figura ilustra el concepto anterior.



Definición 3.12 Dado $k > 0$ y dado $p \in \Delta$, definamos entonces la **oferta restringida** como la solución (o conjunto solución) del siguiente problema de optimización:

$$\begin{cases} \max p \cdot y_j \\ \text{s.a. } y_j \in Y_j^k = Y_j \cap [-ke, ke] \end{cases}$$

Denotémosla por $y_j^k(p)$.

Proposición 3.6 Supongamos que Y_j es cerrado, estrictamente convexo y tal que $0_{\mathbb{R}^\ell} \in Y_j$. Dado $p \in \Delta$, para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $y_j^k(p)$ es un convexo, cerrado, no vacío tal que $py_j \geq 0, \forall y_j \in y_j^k(p)$. Además, la función $y_j^k : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ es continua y la función de beneficio restringida $\pi_j^k(p)$ también es continua.

Prueba. Dado $k > 0$, se tiene que Y_j^k es compacto, convexo y no vacío. En efecto: compacto pues Y_j es cerrado y $[-ke, ke]$ también lo es, luego la intersección es cerrada. Es acotado pues $Y_j^k \subseteq [-ke, ke]$. Luego se tiene lo indicado. Es convexo ya que es la intersección de convexos. Finalmente, es no vacío ya que $0 \in Y_j^k$. Luego, de la compacidad y del hecho que $p \cdot y_j$ es continua, sabemos que existe solución, es decir, $y_j^k(\cdot)$ es no vacía. La conexidad y cerradura viene de la Proposición 3.5. Sea ahora una sucesión $p_n \in \Delta$ tal que $p_n \rightarrow p$. Sea $y_n^k \in Y_j^k$ la oferta correspondiente (que existe por lo anterior), la que podemos asumir converge en Y_j^k (por compacidad de Y_j^k). Sea entonces $y_n^k \rightarrow_n y^* \in Y_j^k$. Por definición, para todo $y \in Y_j^k$ se tiene que $p_n \cdot y_n^k \geq p_n \cdot y$, luego, tomando límite se deduce que $p \cdot y^* \geq p \cdot y$, para todo $y \in Y_j^k$. En particular, $p \cdot y^* \geq p \cdot y^k$. Pero, como y^k es la oferta al precio p , se tiene entonces que $p \cdot y^* = p \cdot y^k$. Finalmente, de la estricta convexidad de Y_j se deduce que $y^* = y^k$. Luego, la oferta es continua en Y_j^k ya que $y_j^k(p_n) \rightarrow y_j^k(p)$. Finalmente, la continuidad de $\pi^k(\cdot)$ es directa ya que es el producto de funciones continuas. \square

Nota 3.5 Cuando el conjunto de producción es sólo convexo (no estrictamente), no se puede afirmar que la oferta sea continua, básicamente por que en tal caso la oferta puede ser más de un punto. Como sabemos, esta opción considera que la oferta sea una correspondencia en vez de una función. En el contexto en que trabajamos, el buen concepto de “continuidad” que se utiliza para correspondencias es aquel de semi-continuidad superior. De hecho, bajo los supuestos indicados, donde se asume convexidad del conjunto Y_j en vez estricta convexidad, se puede probar que la correspondencia $y_j^k(\cdot)$ es semi-continua superior y que la función de beneficio sigue siendo continua. El resultado matemático que garantiza esta propiedad es el teorema del máximo de Berge:

“supongamos que $D \subseteq \mathbb{R}^k$ y $X \subseteq \mathbb{R}^n$ son conjuntos compactos y no vacíos. Sea $\beta : D \rightarrow X$ una correspondencia compacta, convexa, continua y no vacía y sea $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Finalmente sea $\gamma : D \rightarrow X$ definida por

$$\gamma(d) = \{\operatorname{argmax} u(x), x \in \beta(d)\}$$

es decir, las soluciones de la maximización de $u(\cdot)$ en $\beta(d)$. Entonces, bajo las condiciones indicadas, $\gamma(\cdot)$ es s.c.s en D y la función valor óptimo es continua”.

Nota 3.6 Nota Importante. Para qué precios tiene sentido hablar de oferta de la firma? Hasta el momento hemos supuesto implícitamente que los precios estaban en el Simplex. Sin embargo, es perfectamente posible considerar precios negativos y plantear en esos términos el problema de maximización de beneficio de la firma. Sin embargo, bajo un caso particular muy importante se tiene que, de existir oferta para una firma, esta tiene sentido sólo si los precios son positivos (por lo cual podemos asumir que estarán en el Simplex). Este caso es cuando la tecnología verifica la hipótesis de libre disposición. En efecto, supongamos que Y_j cumple con la libre disposición y que además, para $p \in \mathbb{R}^\ell$ existe oferta, digamos, y_j^* . Luego, se cumple que $p \cdot y_j^* \geq p \cdot y_j$, $\forall y_j \in Y_j$. Pero, por libre disposición, para todo $v \in \mathbb{R}_+^\ell$ se tiene que $y_j^* - v \in Y_j$, por lo cual, $p \cdot y_j^* \geq p \cdot (y_j^* - v)$, es decir, $p \cdot v \geq 0$, para todo $v \in \mathbb{R}_+^\ell$. Por lo tanto, de haber oferta bien definida, necesariamente $p \geq 0$. En otras palabras: si los conjuntos cumplen con la hipótesis de libre disposición, entonces la oferta (si existe) tiene sentido sólo para precios positivos. Esta es la relevancia de la hipótesis, la que será asumida en todo lo que sigue. Note finalmente que esta condición, en general, no implica nada respecto de la continuidad, convexidad u otra propiedad topológica, de la oferta: son condiciones de compacidad y convexidad del conjunto en sí lo que permite garantizar buenas propiedades de la oferta. La libre disposición es importante para garantizar que los precios interesantes serán siempre positivos, y por ende, podemos asumirlos en Δ .

En todo lo que sigue, asumiremos que los conjuntos de producción satisfacen la hipótesis de libre eliminación, razón por la cual se puede entender que los precios sean asumidos en Δ .

3.2 Modelo de economía de propiedad privada

Comenzaremos esta sección presentando un modelo de económico ampliamente utilizado en la literatura, cual es el de *economía con propiedad privada* de las firmas. La idea es formalizar el hecho que serán los consumidores los dueños de las empresas y por lo tanto, el resultado del ejercicio de la firma (beneficio) deberán ser repartidos entre estos. Dado esto, las restricciones presupuestarias podrán ser modificadas según la firma obtenga o no beneficios.

La forma más simple de modelar lo anterior consiste en asumir que existen proporciones fijas $\theta_{ij} \geq 0$ según las cuales un individuo $i \in I$ es dueño de la firma $j \in J$. De esta manera, para considerar un modelo de propiedad privada se debe asumir que

$$\sum_{j \in J} \theta_{ij} = 1.$$

Así, dado un precio $p \in \Delta$, si el beneficio de la firma $j \in J$ es $\pi_j(p)$ se tiene que el individuo $i \in I$ recibe como ingreso adicional la cantidad

$$\theta_{ij} \pi_j(p)$$

con lo cual, finalmente, su ingreso total dado $p \in \Delta$ será

$$r_i(p) = p \cdot \omega_i + \sum_{j \in J} \theta_{ij} \pi_j(p), \quad i \in I.$$

Definición 3.13 Dado $p \in \Delta$, el conjunto presupuestario del individuo $i \in I$ se define como

$$\beta_i(p) = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^\ell \mid p \cdot x \leq r_i(p) = p \cdot \omega_i + \sum_{j \in J} \theta_{ij} \pi_j(p) \right\}.$$

Con esto, dado un precio $p \in \Delta$, la demanda del individuo $i \in I$, que denotaremos por $d_i(p)$, se define como el conjunto de puntos que maximizan la función de utilidad u_i sobre el conjunto $\beta_i(p)$ anterior.

Definición 3.14 Una economía de propiedad privada se define como

$$\mathcal{E} = \left(\left(\mathbb{R}_+^\ell \right), (\preceq_i)_{i \in I}, (\omega_i)_{i \in I}, (Y_j)_{j \in J}, (\theta_{ij})_{i \in I, j \in J} \right).$$

3.3 Problema del consumidor revisado

Dado $p \in \Delta$, el problema de optimización de los consumidores en una economía de propiedad privada es

$$\begin{cases} \max u_i(x) \\ \text{s.a. } p \cdot x \leq p \cdot \omega_i + \sum_{j \in J} \theta_{ij} \pi_j(p). \end{cases}$$

Note que, aun cuando impongamos algunas restricciones razonables sobre Y_j (por ejemplo, convexidad), sabemos que no necesariamente la oferta y la función de beneficio serán continuas. Por esta razón, de existir, la correspondencia de demanda tampoco será continua (o s.c.s si es una correspondencia). Sin embargo, al trabajar con un conjunto de producción restringido, bajo condiciones generales sobre la producción, la oferta de la firma será s.c.s y la función valor será continua. En tal caso, aplicando el Teorema del Máximo, resulta que la demanda también será s.c.s, cuestión que es básica para pretender estudiar existencia de equilibrio.

Considremos entonces el problema restringido del consumidor definido como

$$\begin{cases} \max u_i(x) \\ \text{s.a. } p \cdot x \leq p \cdot \omega_i + \sum_{j \in J} \theta_{ij} \pi_j^k(p) \end{cases}$$

donde $\pi_j^k(p)$ viene de la maximización del beneficio en el conjunto Y_j^k ya definido. Dado $p \in \Delta$, para este caso denotemos la correspondencia de demanda por

$$d_i^k(p).$$

Proposición 3.7 Bajo las condiciones de la Proposición 3.6 sobre la producción, si la función de utilidad es continua y $\omega_i \gg 0$, entonces la correspondencia de demanda $d_i^k(\cdot)$ es s.c.s en el interior de Δ . Más aun, dicha correspondencia es a valores convexos, compactos no vacíos.

Prueba. En primer lugar, se requiere que $\omega_i \gg 0$ y que $p \in \Delta$ para garantizar que la demanda esté bien definida. Ahora bien, de las condiciones del problema, sabemos que $\hat{\pi}_j(\cdot)$ es continua en los precios. Luego, la correspondencia $\beta_i : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ de restricción presupuestaria es continua en los precios y a valores compactos. Por lo tanto, considerando que la función objetivo es continua, del Teorema del Máximo de Berge se deduce que la demanda es s.c.s en los precios. Que sea a valores convexos y compactos es directo y queda como ejercicio. \square

3.4 Noción y existencia de equilibrio

A partir de todo lo anterior, estamos en condiciones de definir el concepto de equilibrio en un modelo de economía de propiedad privada. Obviamente el concepto a definir parte de la base de los problemas de la firma y los individuos que ya hemos descrito, considerando además que la restricción de Walras debe tomar en cuenta el hecho que la producción pasa a forma parte del consumo de los individuos. Previo a definir el concepto de equilibrio, necesitamos algunas definiciones previas.

Definición 3.15 Una distribución de bienes es un punto

$$((x_i)_{i \in I}, (y_j)_{j \in J}) \in \mathbb{R}_+^{\ell m} \times \prod_{j \in J} Y_j.$$

Una distribución de bienes $((x_i)_{i \in I}, (y_j)_{j \in J})$ se dice **factible** si

$$\sum_{i \in I} x_i \leq \sum_{j \in J} y_j + \sum_{i \in I} \omega_i.$$

El conjunto de las distribuciones factibles será denotado por

$$\Omega = \left\{ ((x_i)_{i \in I}, (y_j)_{j \in J}) \in \mathbb{R}_+^{\ell m} \times \prod_{j \in J} Y_j \mid \sum_{i \in I} x_i \leq \sum_{j \in J} y_j + \sum_{i \in I} \omega_i \right\}.$$

Finalmente, denotemos por \mathbb{R}^Ω e Y_j^Ω las proyecciones de Ω sobre \mathbb{R}_+^ℓ e Y_j respectivamente. Estos conjuntos corresponden a los **consumos y producciones factibles**, respectivamente. Es directo que

$$\mathbb{R}^\Omega \subseteq \mathbb{R}_+^\ell, \quad Y_j^\Omega \subseteq Y_j.$$

Nota 3.7 La idea de definir los conjuntos anteriores es hacer explícito el hecho que, a priori, no cualquier plan de producción puede ser factible y por lo tanto, existen ciertos puntos en los conjuntos de consumo y producción que nunca participarán en el equilibrio, cualquiera que este sea. Tal como veremos de inmediato, no es sólo un asunto de utilidades y beneficios lo que finalmente define el equilibrio, la condición de factibilidad técnica delimita las opciones para que un plan de consumo y producción pueda ser o no un equilibrio.

Dado lo anterior estamos en condiciones de definir el concepto de equilibrio en un modelo de economía de propiedad privada.

Definición 3.16 Un equilibrio competitivo de una economía de propiedad privada \mathcal{E} es una distribución factible $((x_i^*)_{i \in I}, (y_j^*)_{j \in J})$ junto con un precio $p^* \in \Delta$, tales que

- a.- para todo $i \in I$, $x_i^* \in d_i(p^*)$;
- b.- para todo $j \in J$, $y_j^* \in y_j(p^*)$;
- c.- $\sum_{i \in I} x_i^* \leq \sum_{j \in J} y_j^* + \sum_{i \in I} \omega_i$.

En otras palabras, un equilibrio es una colección de consumos, producciones y un precio tales que para cada individuo, el consumo indicado es el maximal de la preferencia en el conjunto presupuestario (máximo de la utilidad) que define el precio de equilibrio, cada firma maximiza sus beneficios en el nivel de producción correspondiente al nivel de precios de equilibrio, y se cumple la restricción de factibilidad.

Una forma muy utilizada para expresar en forma equivalente el concepto de equilibrio es a través del uso de la función (correspondencia) exceso de demanda.

Definición 3.17 La correspondencia (o función según corresponda) **exceso de demanda** se define como:

$$\zeta : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^\ell \quad | \quad \zeta(p) = \sum_{i \in I} d_i(p) - \sum_{j \in J} y_j(p) - \sum_{i \in I} \omega_i.$$

□

Por lo tanto, de la definición de equilibrio, sabemos que si $(p^*, (x_i^*)_{i \in I}, (y_j^*)_{j \in J})$ es un equilibrio, significa que para todo $i \in I, j \in J$,

$$x_i^* \in d_i(p^*), \quad y_j^* \in y_j(p^*)$$

y además, $\sum_{i \in I} x_i^* \leq \sum_{j \in J} y_j^* + \sum_{i \in I} \omega_i$. Por lo tanto, definiendo

$$z^* = \sum_{i \in I} x_i^* - \sum_{j \in J} y_j^* - \sum_{i \in I} \omega_i$$

se tiene que el punto es equilibrio si y sólo si

$$z^* \in \zeta(p^*), \quad z^* \leq 0.$$

Si la oferta y las demandas son funciones, entonces el exceso de demanda es una función y la condición de equilibrio corresponde a garantizar la existencia de un precio $p^* \in \Delta$ tal que

$$\zeta(p^*) \leq 0_{\mathbb{R}^\ell}.$$

Luego, todo el problema de demostrar existencia de equilibrio consiste en probar que existen puntos p^* y z^* cumpliendo lo anterior.

Definición 3.18 Dado $k > 0$, definamos la correspondencia exceso de demanda restringida como

$$\zeta^k : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^\ell$$

tal que

$$\zeta^k(p) = \sum_{i \in I} d_i^k(p) - \sum_{j \in J} y_j^k(p) - \sum_{i \in I} \omega_i,$$

donde d_i^k e y_j^k vienen del problema restringido que habíamos definido.

La siguiente proposición se obtiene directamente como resumen de todo lo desarrollado hasta el momento.

Proposición 3.8 Si se cumple que:

a.- Para cada $i \in I$,

i.- $u_i : \mathbb{R}_+^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, estrictamente cóncava y estrictamente creciente por componentes;

ii.- $\omega_i \in \mathbb{R}_{++}^\ell$

b.- Para todo $j \in J$ se tiene que

i.- Y_j es cerrado y convexo;

- ii.- $0 \in Y_j$;
- iii.- $Y_j - \mathbb{R}_+^\ell \subseteq Y_j$

c.- Ω es compacto

entonces $\zeta^k(\cdot)$ es una correspondencia s.c.s, a valores convexos, compactos y no vacíos. Además, $p \cdot z = 0$ para todo $p \in \Delta$, $z \in \zeta(p)$ (ley de Walras).

Prueba. Que la correspondencia sea s.c.s se obtiene del hecho que $\zeta^k(\cdot)$ es la suma de correspondencias s.c.s según ya habíamos demostrado anteriormente. Que sea a valores convexos y compactos se obtiene del hecho que las correspondencias $d_i^k(\cdot)$ y $y_j^k(\cdot)$ lo son, como ya teníamos bajo las condiciones indicadas. Finalmente, resta demostrar sólo la ley de Walras. Esto viene del hecho que bajo condiciones de estricta monotonía de las funciones de utilidad, se cumple que para todo $x_i \in d_i^k(p)$, para todo $y_j \in y_j^k(p)$,

$$p \cdot x_i = p \cdot \omega_i + \sum_{j \in J} \theta_{ij} p \cdot y_j.$$

Luego, sumando en $i \in I$ se tiene que

$$p \cdot \sum_{i \in I} x_i = p \cdot \sum_{i \in I} \omega_i + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \theta_{ij} p \cdot y_j = p \cdot \sum_{i \in I} \omega_i + p \cdot \sum_{j \in J} y_j$$

pues, por definición, $\sum_{i \in I} \theta_{ij} = 1$. Luego, ordenando términos, se tiene que

$$p \cdot \left[\sum_{i \in I} x_i - \sum_{j \in J} y_j - \sum_{i \in I} \omega_i \right] = 0.$$

De las propiedades de ζ^k es directo probar (Ejercicio) que

$$\zeta^k(\Delta) = \bigcup_{p \in \Delta} \zeta(p)$$

es un conjunto compacto. Dado esto, se tiene la siguiente proposición, clave para demostrar el Teorema de Existencia de Equilibrio.

Proposición 3.9 Sea Z un conjunto compacto no vacío de \mathbb{R}^ℓ y sea $\Gamma : \Delta \rightarrow Z$ una correspondencia s.c.s a valores compactos y no vacíos. Supongamos además que para todo $z \in \Gamma(p)$, $p \in \Delta$, se cumple que $p \cdot z = 0$. Entonces existe $p^* \in \Delta$ y $z^* \in \Gamma(p^*)$ tal que $z^* \leq 0$.

Prueba. Sea $h : Z \rightarrow \Delta$ definida por

$$h(z) = \{p \in \Delta \mid p \cdot z \geq p' \cdot z, \forall p' \in \Delta.\}$$

Es directo (Ejercicio, ver la demostración del Teorema de Existencia de Equilibrio para economías de intercambio) que $h(\cdot)$ es a valores convexos, compactos, no vacíos y s.c.s.

Sea entonces

$$\mu : Z \times \Delta \rightarrow Z \times \Delta$$

definida como

$$\mu(z, p) = \Gamma(p) \times h(z).$$

Es fácil ver que (Ejercicio) $\mu(\cdot)$ es s.c.s, a valores convexos, compactos y no vacíos. Por lo tanto, del hecho que $Z \times \Delta$ es convexo y compacto, podemos aplicar Kakutani y deducir que existe $(z^*, p^*) \in Z \times \Delta$ tal que

$$(z^*, p^*) \in \mu(z^*, p^*) = \Gamma(p^*) \times h(z^*),$$

de lo cual se tiene que $z^* \in \Gamma(p^*)$ y $p^* \in h(z^*)$. De lo primero, por hipótesis se concluye que $p^* \cdot z^* = 0$. De la segunda, tenemos que $p^* \cdot z^* \geq p' \cdot z^*$, $\forall p' \in \Delta$, es decir, para todo $p' \in \Delta$ se tiene que $p' \cdot z^* \leq 0$. Por lo tanto, $z^* \leq 0$ (Ejercicio: probar por contradicción que z^* debe ser neagativo en todas sus componentes). \square

Dado todo lo anterior, estamos en condiciones de probar el Teorema de existencia de equilibrio bajo las condiciones que se detallarán.

Teorema 3.1 Teorema de existencia de equilibrio

Si se cumple que:

a.- Para cada $i \in I$,

i.- $u_i : \mathbb{R}_+^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, cuasi-cóncava y no saciada;

ii.- $\omega_i \in \mathbb{R}_{++}^\ell$

b.- Para todo $j \in J$ se tiene que

i.- Y_j es cerrado y convexo;

ii.- $0 \in Y_j$;

iii.- $Y_j - \mathbb{R}_+^\ell \subseteq Y_j$

c.- Ω es compacto

entonces existe equilibrio competitivo para economía \mathcal{E} .

Prueba. Por compacidad de Ω , existe $k > 0$ tal que

$$\Omega \subseteq [-ke, ke]$$

donde $e = (1, 1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^\ell$. Luego, los consumos y producciones factibles Y_j^Ω , \mathbb{R}^Ω (contenidos en Ω) pueden ser incluidos en una caja $[-ke, ke]$, con $k > 0$ suficientemente grande. Más aun, escojamos $k > 0$ de modo que los factibles estén en el interior de la caja y sea¹⁸

$$Y_j^k = Y_j \cap [-ke, ke], \quad j \in J, \quad X_i^k = \mathbb{R}_+^\ell \cap [-ke, ke] = [0, ke], \quad i \in I$$

que son conjuntos compactos de \mathbb{R}^ℓ . Dado esto, como sabemos la correspondencia de exceso de demanda restringida¹⁹ $\zeta^k(\cdot)$ cumple con todas las hipótesis de la Proposición 3.9, por lo cual existe (p^*, z^*) tal que $z^* \in \zeta^k(p^*)$, con $z^* \leq 0$. Luego, del hecho que z^* se puede descomponer de la forma

¹⁸En rigor, el problema restringido del consumidor considera que los puntos factibles son aquellos de $\beta_i(p) \cap [0, ke]$. Sin embargo, cuando $k > 0$ es suficientemente grande, podemos asumir que el conjunto presupuestario está contenido en la caja, por lo cual esta restricción es superflua.

¹⁹Insisto: con $k > 0$ suficientemente grande, en el problema restringido de los consumidores es la caja no aporta como restricción pues el conjunto presupuestario es compacto.

$$z^* = \sum_{i \in I} x_i^* - \sum_{j \in J} y_j^* - \sum_{i \in I} \omega_i$$

se tiene que $(p^*, (x_i^*), (y_j^*))$ es un equilibrio de la economía restringida. Vamos a probar que dicho equilibrio en la economía restringida es un equilibrio en la economía \mathcal{E} . Supongamos entonces que y_j^* no maximiza $p \cdot y$ con $y \in Y_j$. Entonces, existe $y'_j \in Y_j$ tal que $p^* \cdot y'_j > p^* \cdot y_j^*$. Sea entonces $\lambda \in]0, 1[$ y definamos

$$y_j'' = \lambda y_j^* + (1 - \lambda) y'_j.$$

De la convexidad de Y_j se tiene que $y_j'' \in Y_j$. Por otro lado, puesto que $y_j^* \in \text{int}[-ke, ke]$ y la caja es convexa, se tiene que para λ cercano a uno (pero diferente), el punto y_j'' estará en la caja y con ello, para λ cercano a uno, concluimos que estará en Y_j^k . Notemos ahora que

$$p^* \cdot y_j'' = \lambda p^* \cdot y_j^* + (1 - \lambda) p^* \cdot y'_j > p^* \cdot y_j^*$$

lo que es una contradicción pues y_j^* maximizaba el beneficio en Y_j^k .

Veamos ahora que x_i^* maximiza la utilidad en el conjunto de consumo sin restricción. En efecto, en primer lugar notemos que $\pi_j(p^*) = \pi_j(p^*)$ pues y_j^* maximiza el beneficio en todo el conjunto de consumo (obviamente también en el conjunto restringido). Supongamos entonces que existe $x'_i \in \mathbb{R}_+^\ell$ tal que $u_i(x'_i) > u_i(x_i^*)$. Puesto que \mathbb{R}_+^ℓ es convexo y hemos supuesto que los factibles se encuentran en el interior de la caja $[0, ke]$, se tiene que para λ cercano a uno el punto

$$x_i'' = \lambda x_i^* + (1 - \lambda) x'_i$$

estará en $[0, ke]$. Puesto que la función es cuasi - cóncava, se tiene entonces que

$$u_i(x_i'') > u_i(x_i^*)$$

lo que no puede ser ya que x_i^* maximiza la función en el conjunto $[0, ke]$. Con todo lo anterior, hemos terminado de demostrar el Teorema de Existencia de Equilibrio. \square

4 Fallas de mercado

Todo el modelo que hemos estudiado hasta el momento descanza en dos supuestos fundamentales. El primero es que ninguno de los agentes de la economía tiene injerencia individual en los precios, y el segundo que en las decisiones de consumo de los individuos, y de producción de las firmas, los agentes deciden sobre las base de funciones objetivo que sólo dependen de los bienes por ellos consumidos y de precios, valores estos que resumen para cada agente los resultados de las decisiones de todos los otros participantes de la economía.

En ningún caso en el modelo que hemos desarrollado se han considerado hechos relevantes que comunmente se observan en la realidad y que en alguna medida dan cuenta de situaciones donde, precisamente, las decisiones de cada individuo pueden ser afectadas por las decisiones o acciones de los demás. La única interacción que se considera en el modelo usual radica en la igualdad entre oferta y demanda que finalmente debe ser verificada para vaciar el mercado. Como dice Malinvaud, *el modelo de producción y consumo, con el que hemos razonado hasta ahora, ofrece una característica importante a la que debemos prestar atención: las interdependencias que reconoce entre los agentes se reducen al mínimo más estricto.*

Tratar de incorporar con toda generalidad las posibles inter-relaciones entre los agentes de la economía es, en realidad, un trabajo estéril. Lo anterior se debe básicamente a la alta complejidad

que se alcanza en una estructura económica tan general. El punto no es pensar en estos “super modelos” que permitan incorporar toda la complejidad de la economía en un único modelo, sino más bien considerar algunos tipos de interrelaciones que puedan ser tratadas de manera satisfactoria, y que además tengan algún interés en la práctica. Precisamente el análisis de los bienes públicos y la presencia de externalidades en el mercado son dos de las interrelaciones más relevantes que usualmente se consideran en economía.

4.1 Externalidades

Existe una externalidad en la economía toda vez que *el bienestar de un consumidor o los planes de producción de una firma son afectados directamente por las acciones de los otros agentes de la economía, de tal forma que la decisión sobre tales acciones no depende de un mecanismo de precios.* La idea es entonces considerar la existencia de ciertas acciones (y sus consecuencias), que ejecutadas por determinados individuos pueden tener efectos en los otros, y de tal forma que las decisiones sobre las mismas no surgen como resultado de las transacciones entre los individuos, no interviniendo así precios para determinar los valores finales resultantes.

Ejemplo 4.1 Cuando uno escucha música, obviamente pagó por el disco, por la electricidad, por el reproductor, etc. Si la música que Ud. escucha es desagradable para otro individuo, Ud. no necesariamente “internaliza” tales perjuicios en su función de utilidad de tal forma que su acción (escuchar música desagradable o muy fuerte) no tiene un costo para Ud., pero si representa un perjuicio para el otro personaje. En tal caso, como Ud. no “debe pagar” por escuchar la música como desee pero ocurre que la utilidad del otro depende de esa decisión, estamos entonces en presencia de una externalidad en la economía. En este caso, como la música que Ud. escucha (o el volumen de la misma) es “desagradable” para el otro (digamos, es un “mal” y no un “bien”) hablamos de externalidad negativa. Por el contrario, si su vecino disfruta de sus gustos musicales, estamos entonces en presencia de una externalidad positiva. Note que en este último caso no hemos planteado la posibilidad que su vecino le pague para que Ud. ponga su musiquita. Tampoco hemos planteado la posibilidad que si su música es muy mala, Ud. deba pagar por escuchar, de modo que compense monetariamente su mal gusto...

Para modelar la externalidades en la economía, consideremos un primer caso simple dos individuos y dos bienes. Supongamos entonces que un individuo $i = 1, 2$ posee una función de utilidad u_i que depende del vector de consumo $x_i = (x_{i1}, x_{i2}) \in \mathbb{R}^2$ y de un nuevo factor $e \in \mathbb{R}$. Supongamos además que uno de los individuos decide optimamente la cantidad de e (el tipo uno) y que el otro sólo recibe las consecuencias, sin tener injerencia en la cuantía de la misma (el tipo dos). Que el efecto sobre el individuo dos sea “positivo” o “negativo” no es relevante por el momento. Así, dadas dotaciones iniciales $\omega_i = (\omega_{i1}, \omega_{i2}) \in \mathbb{R}^2$ de bienes de consumo, al precio de mercado $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ tenemos que el problema del consumidor uno es

$$\begin{cases} \max_{x_i, e} & u_i(x_i, e) \\ \text{s.a.} & p \cdot x_i = p \cdot \omega_i. \end{cases}$$

Note que en este problema no hemos supuesto que la cantidad demandada de e altera la riqueza del tipo. Precisamente esto está en la naturaleza de la externalidad. Así, si denotamos por e^* la cantidad óptima de externalidad del tipo uno, la demanda por bienes será entonces $x_1(e^*)$. Dada la utilidad indirecta

$$v_1^* = u_1(x_1^*, e^*),$$

se tiene entonces que

$$\left[\frac{\partial v_1^*}{\partial e} \right]_{e=e^*} = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_{11}} \frac{\partial x_{11}^*}{\partial e} + \frac{\partial u_1}{\partial x_{12}} \frac{\partial x_{12}^*}{\partial e} \right]_{e=e^*} = 0$$

por lo que en el óptimo se cumple que

$$\frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_{11}}}{\frac{\partial u_1}{\partial x_{12}}} = - \frac{\frac{\partial x_{12}^*}{\partial e}}{\frac{\partial x_{11}^*}{\partial e}}. \quad (1)$$

Para el tipo dos, su problema de maximización de beneficio es

$$\begin{cases} \max_{x_2} u_2(x_2, e^*) \\ s.a \quad p \cdot x_2 = p \cdot \omega_2. \end{cases}$$

De las condiciones de optimalidad sigue que

$$\frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_{21}}}{\frac{\partial u_2}{\partial x_{22}}} = \frac{p_1}{p_2}. \quad (2)$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (1) y (2) se tiene que, en general,

$$\frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_{11}}}{\frac{\partial u_1}{\partial x_{12}}} \neq \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_{21}}}{\frac{\partial u_2}{\partial x_{22}}},$$

es decir, que la decisión óptima de externalidad por parte del individuo uno implica una asignación de recursos que no necesariamente es Pareto eficiente.

A partir de lo anterior, surge entonces la pregunta sobre cuál es entonces la cantidad óptima de e que debería ocupar el individuo uno. La respuesta no es obvia y depende de como se comparen la utilidades de los individuos. En efecto, uno podría ir al extremo y considerar que el ruido en la economía no es deseable. Dado esto, el óptimo sería $e^* = 0$, y en tal caso el tipo dos estaría muy feliz, pero, y esto es lo relevante, el tipo uno estaría muy descontento. Gana entonces la sociedad? No es claro. En el ejemplo anterior, ganaría si la sociedad valora muy poco la preferencia del individuo uno y mucho la del dos. Para responder entonces a la pregunta uno debería disponer de una forma de computar algo así como una “utilidad social” y la decisión óptima de e^* es aquella que maximiza esta utilidad. Por lo tanto, la respuesta finalmente depende de como se defina la utilidad social...

Con el fin de ser proactivos, supongamos, por simplicidad, que la “utilidad social” es simplemente la suma de las utilidades de los individuos. En tal caso, la cantidad óptima de e debe ser aquella que maximice la utilidad anterior sujeto obviamente a la restricción de factibilidad de los consumos (que no depende de la escogencia de e). Así, el problema que nos ocupa es

$$\begin{cases} \max_{x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, e} u_1(x_{11}, x_{12}, e) + u_2(x_{21}, x_{22}, e) \\ s.a \quad x_{11} + x_{21} = \omega_1 \\ \quad \quad x_{12} + x_{22} = \omega_2. \end{cases}$$

Además de la condición de tangencia de las curvas de indiferencia, la solución de este problema implica que

$$\frac{\partial u_1}{\partial e} + \frac{\partial u_2}{\partial e} = 0.$$

En otras palabras, la cantidad óptima de externalidad que demanda el individuo uno debe ser tal que la suma de las utilidades marginales c.r a la externalidad sumen cero. Es decir, que el beneficio extra que obtiene el individuo uno por consumir una unidad más de e sea igual a des-utilidad que obtiene el individuo dos por lo mismo. Si denotamos por e^{**} el valor de la externalidad que resuelve el “problema social” anterior, es claro que en general

$$e^* \neq e^{**}.$$

Lo anterior implica entonces un problema relevante: si el individuo uno “no internaliza” el *problema* que le puede causar al individuo dos producto de su gusto por e , ocurre su demanda por externalidad no tiene por qué ser compatible con lo que sería deseable socialmente. La pregunta que surge entonces es cómo “obligar” al individuo uno para que su demanda por externalidad sea e^{**} y no e^* . Llamemos e^* la solución privada y e^{**} la solución social. Por lo tanto, el tema es como hacer compatible la solución social con la privada. Una primera aproximación para lograr esta compatibilidad parte de la idea de “obligar” al individuo uno a “internalizar el costo” de su externalidad, ya sea vía el pago de “impuesto” o imponiendo cotas a la demanda. Esta solución interventora es precisamente la solución que Pigou propone en su famoso trabajo²⁰. Así, supongamos que q denota un precio a la externalidad, de tal forma que el problema del consumidor uno es ahora

$$\begin{cases} \max_{x_{11}, x_{12}, e} & u_1(x_{11}, x_{12}, e) \\ \text{s.a} & p_1 x_{11} + p_2 x_{12} + t_e \cdot e = p \cdot \omega_1. \end{cases}$$

En el problema anterior hemos internalizado la demanda de e . Este problema tiene una solución, digamos, $x_1(p, q)$ y $e(p, q)$. Claramente si $q = 0$, entonces $e(p, 0) = e^*$. Por otro lado, asumiendo que es posible, podemos imaginar la existencia de un valor q^{**} tal que

$$e(p, q^{**}) = e^{**},$$

es decir, al imponer precios adecuados (impuestos) podríamos obligar a que la demanda privada coincida con la demanda social.

Un enfoque distinto del anterior sería definir un **mecanismo de mercado** para lograr el mismo objetivo. En el caso “pigoviano” la idea es hacer intervenir un tercer agente (el Estado) que fija impuestos (precios) según lo anterior. Sin embargo, si uno define ciertos derechos de los individuos respecto de la externalidad y permite que estos derechos sean transados en el mercado, ocurre entonces que bajo ciertas condiciones precisamente esta transacción de mercado llevará a la misma solución anterior. Para fijar ideas, supongamos que algún Estado garantiza que el individuo dos debería estar libre de la externalidad e y que, bajo esta premisa, si el individuo uno de todas formas desea usar externalidad, debe entonces compensar al individuo dos por los efectos que esta pueda provocar. En tal caso, el individuo dos ofrece vender parte de su derecho, permitiendo al tipo uno ocupar cierta cantidad de e , pagando por lo mismo. Si denotamos por q el precio de la externalidad (que será una variable endógena, es decir, por determinar al interior del equilibrio), el problema del consumidor uno es

$$\begin{cases} \max & u_1(x_1, e) \\ \text{s.a} & p \cdot x_1 = p \cdot \omega_1 - qe, \end{cases}$$

mientras que aquel del individuo dos es

$$\begin{cases} \max & u_2(x_2, e) \\ \text{s.a} & p \cdot x_2 = p \cdot \omega_2 + qe. \end{cases}$$

En el modelo anterior, el individuo dos tiene el “derecho” a un ambiente libre de la externalidad e . Si el individuo uno decide demandar una cierta cantidad e , debe entonces dado un precio q por unidad, debe pagarle al individuo una cantidad qe , la que obviamente se resta de su riqueza. De lo anterior entonces, dados los precios, en situación de optimalidad ocurre que si el individuo uno decide incrementar en una unidad el consumo de externalidad, su utilidad marginal será $\frac{\partial u_1}{\partial e}$, y el costo de esto es $-q$. Ahora, si el individuo dos decide vender una unidad de externalidad, su des-utilidad marginal es $\frac{\partial u_2}{\partial e}$, pero recibe una ganancia q . Luego, en situación optimal se debe cumplir que

²⁰Ver en <http://www.econlib.org/library/NPDBooks/Pigou/pgEW.html>

$$\frac{\partial u_1}{\partial e} - q = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial e} + q = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u_1}{\partial e} + \frac{\partial u_2}{\partial e} = 0. \quad (3)$$

Por el lado de los bienes, en el óptimo obviamente se debe cumplir la igualdad de tasas marginales de sustitución. Con esto, las condiciones de optimalidad que se obtiene en este problema son las mismas que teníamos para el problema social antes detallado. Por lo tanto, la solución de este problema debe coincidir con dicho óptimo social. La gran conclusión es entonces que: *definiendo derechos sobre la externalidad (es decir, introduciendo un mercado para la misma) y dejando que los individuos intercambien libremente, la demanda óptima de externalidad es aquella que se tendría como solución óptima social.* En otras palabras, este modelo simple nos muestra que una alternativa a la *intervención a la Pigou* es precisamente dejar en claro los derechos de propiedad de los individuos respecto de la externalidad y dejar que un mecanismo de mercado asigne los recursos. Este resultado, en forma simple, es precisamente el **Teorema de Coase**²¹: *ante presencia de determinadas externalidades (efectos externos) siempre será posible la consecución de una externalidad óptima, compatible con el máximo bienestar social. Esto se logrará a través de la negociación entre las partes, bajo el supuesto que (i) que los derechos de propiedad de las distintas partes estén bien asignados, (ii) que no existan costos de transacción y (iii) que no existan efectos renta.*

Nota 4.1 La transacción de derechos puede tener costos tan elevados que absorban completamente los beneficios derivados del intercambio. Para fijar ideas, supongamos que una planta química muy eficiente se instala en la ribera de río, de tal manera que para producir necesariamente debe contaminar. Si río abajo está instalada una planta lechera que ocupa agua del río, que ex-ante la instalación de la planta química ocupaba el agua pura para producir, obviamente con la instalación no podrá producir. Si la planta lechera tiene el derecho a agua pura, entonces la planta química se instalará toda vez que llegue a un acuerdo privado con la planta lechera respecto de cuanto pueda contaminar. Si efectivamente contamina, deberá entonces compensar a la planta lechera por un monto que acuerden. Así, Coase funciona... Supongamos ahora que no hay planta lechera, de tal forma que ahora los perjudicados son bañistas del río, quienes genéricamente tiene derecho a tener un ambiente libre de contaminación para su diversión. Para hacer su operación, la planta tiene entonces que ponerse de acuerdo con dichas personas. Cómo podrá identificar a todos y cada uno de bañistas y ponerse de acuerdo con cada uno de ellos respecto del monto de la indemnización? Siempre aparecerán nuevos individuos afirmando que tenían la intención de ir bañarse al río y que por tanto quieren una indemnización. Por otro lado, podría aparecer alguno que se aproveche de la situación de tal manera que estando consciente que puede impedir por sí solo que la planta química entre en funcionamiento, pedirá para sí una indemnización excesiva. En este caso, los costos de transacción podrían ser muy altos y con ello no necesariamente una solución de mercado es la que nos llevará al óptimo social.

Nota 4.2 Otro efecto que puede ocurrir con el tema de los mercados de derechos, es que producto de las transacciones algunos individuos pueden cambiar la renta y con ello su demanda por ciertos bienes. Si la compensación es alta, entonces determinados individuos que antes no valoraban la calidad del medio ambiente pueden ahora, por efecto renta, valorarlo más de lo que lo hacían originalmente. Esto puede traer problemas que dificulten la negociación ya que, por ejemplo, ex post el contrato pueden alegar que no están de acuerdo con el precio, que se “oponen a la externalidad”, etc. Este efecto renta es despreciado en el Teorema de Coase.

Nota 4.3 Algunas críticas que ha recibido el enfoque de Coase se deben a Samuelson, quien dice que con el teorema de Coase usualmente la riqueza no será máxima aún con costos de transacción nulos.

²¹Para más detalles y ejemplos, ver R. H. Coase (1994): “La empresa, el mercado y la ley”. Alianza Editorial. Madrid, 1994.

Lo anterior ya que siempre habrá en la negociación un monopolio bilateral que lleve a un resultado indeterminado, por miedo a empeorar una situación de status quo existente. Coase dice que esta argumentación es errónea porque si ya haba contrato, las condiciones del mismo se cumplen, y si no hay contrato no hay condición que poner en peligro. Dice Coase que Samuelson plantea esto porque quizá considera una situación en que no existe contrato ni intercambio, al no ponerse de acuerdo las partes, y ello afecta a las ganancias. En ese caso, es posible que no se maximice la riqueza, pero dice Coase que esas situaciones serán mínimas. Sin embargo Coase no argumenta por qué eso es así, por lo que cabe poner en tela de juicio la postura de ambos. Otra crítica a Coase es que, realmente, existen efectos renta que varían la asignación de recursos. Pero lo que hace Coase es suponer un efecto total de ingreso es cero tras la negociación, por lo que no debería haber una modificación en la asignación de recursos que invalide el teorema. En referencia a la asignación de derechos, Coase afirma que si existen costos de transacción nulos, aunque cambie la situación legal la asignación de recursos no varía. En cambio dicen sus críticos que ante una modificación de las leyes varía la distribución de la riqueza, lo cual da lugar a variaciones de la demanda y consecuentes cambios en la asignación de recursos. Coase niega esto, porque se ha explicado ya que la distribución de riqueza no varía ante cambios de leyes..

Ejemplo 4.2 Consideremos dos firmas en el mercado ($j = 1, 2$) de tal forma que la función de producción de la firma uno es dada por²²

$$y_1 = f_1(L_1)$$

y para la dos

$$y_2 = f_2(y_1, L_2)$$

La existencia de la externalidad presupone que

$$\frac{\partial y_2}{\partial y_1} \neq 0.$$

Si la deriva anterior es negativa, la externalidad es negativa; la externalidad es positiva en caso contrario. Note ahora que

$$y_2 = f_2(y_1, L_2) = f_2(f_1(L_1), L_2) \equiv \tilde{f}_2(L_1, L_2).$$

Si denotamos por L_0 la cantidad de factor disponible, dado $\mu > 0$, sabemos que las producciones Pareto eficientes provienen de la solución del problema de optimización

$$\begin{cases} \max_{L_1, L_2} & f_1(L_1) + \mu \tilde{f}_2(L_1, L_2) \\ \text{s.a} & L_1 + L_2 = L_0 \end{cases}$$

La solución del problema anterior, que depende de μ , define entonces las asignaciones eficientes (deseables) en la economía²³. Dado entonces el Lagrangeano

$$\mathcal{L} = f_1(L_1) + \mu \tilde{f}_2(L_1, L_2) + \lambda(L_0 - L_1 - L_2)$$

sigue que las condiciones de optimalidad son

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_1} = 0 \quad : \quad \frac{\partial f_1}{\partial L_1} + \mu \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial L_1} - \lambda = 0$$

²²Suponga que sólo hay un factor: trabajo.

²³Las asignaciones deseables, eficientes, etc., al menos han de ser óptimos de Pareto. Otra forma de ver esto es considerar que la función de producción conjunta anterior representa una función de producción social que es deseable maximizar. Esta función social claramente internaliza el efecto de la externalidad que provoca la firma uno sobre la dos.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_2} = 0 \quad : \quad \mu \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial L_2} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \quad : \quad L_1 + L_2 = L_0$$

Con esto, finalmente, queda que

$$\frac{\partial f_1}{\partial L_1} + \mu \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial L_1} = \mu \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial L_2}, \quad (4)$$

que, adicional a la condición de factibilidad, define entonces las asignaciones eficientes en esta economía.

Supongamos ahora que las firmas actúan competitivamente en el mercado, de tal forma que el precio del factor es w y aquel de los productos es p_1 para el bien uno que produce la firma uno y p_2 para aquel de la firma dos. Si las firmas deciden maximizar el beneficio conjunto en este analisis de equilibrio parcial (precio fijos), entonces el problema de las firma será

$$\max_{L_1, L_2} p_1 f_1(L_1) + p_2 \tilde{f}_2(L_1, L_2) - w(L_1 + L_2)$$

que, al imponer las condiciones de optimalidad, resulta en (análogo a lo anterior)

$$p_1 \frac{\partial f_1}{\partial L_1} + p_2 \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial L_1} = p_2 \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial L_2}.$$

Note que si $\frac{\mu=p_2}{p_1}$, en este análisis de equilibrio parcial ocurre que la solución del problema anterior deriva en un óptimo de Pareto. En lo que sigue, asumimos que se cumple lo anterior, de tal forma que la maximización del beneficio conjunto lleva a un óptimo de Pareto de la economía. Note que según lo anterior, al llevar a cabo este proceso de maximización conjunta, la firma uno internaliza el hecho que sus decisiones pueden afectar el resultado de la firma dos. Supongamos ahora que la firma uno no internaliza este efecto. En tal caso, su decisión de producción es tal que maximiza su propio beneficio

$$\max_{L_1} p_1 \cdot f_1(L_1) - wL_1$$

lo que implica

$$p_1 \frac{\partial f_1}{\partial L_1} = w$$

cuya solución denotamos $\bar{L} - 1$. Por otro lado, asumiendo dado el efecto externo que provoca la firma uno sobre la dos (es decir, asumiendo dada la demanda \bar{L}_1), la firma dos resuelve el siguiente problema

$$\max_{L_2} p_2 \cdot \tilde{f}_2(\bar{L}_1, L_2) - wL_2,$$

por lo que

$$p_2 \cdot \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial L_2} = w.$$

De lo anterior se deduce que

$$p_1 \frac{\partial f_1}{\partial L_1} = p_2 \cdot \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial L_2} \Leftrightarrow \frac{\partial f_1}{\partial L_1} = \mu \cdot \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial L_2},$$

relación que difiere de aquella dada en (4) que definía las asignaciones Pareto. En consecuencia, cuando las firmas proceden individualmente sin que se internalice el efecto que una tiene sobre la otra, ocurre que la solución que se alcanza no es eficiente. Para resolver este problema, el enfoque a al Pigou propone entonces poner un impuesto a los beneficios de la firma uno. Si denotamos por T dicho impuesto²⁴, el problema de la firma uno es entonces

$$\max_{L_1} (1 - T)p_1 \cdot f_1(L_1) - wL_1.$$

Dado esto, la condición de optimalidad ahora es

$$(1 - T)p_1 \frac{\partial f_1}{\partial L_1} = w,$$

que, asumiendo que la firma dos no percibe ni impuesto ni subsidio, implica que

$$(1 - T)p_1 \frac{\partial f_1}{\partial L_1} = p_2 \cdot \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial L_2},$$

es decir,

$$p_1 \frac{\partial f_1}{\partial L_1} - T p_1 \frac{\partial f_1}{\partial L_1} = p_2 \cdot \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial L_2} \Leftrightarrow \frac{\partial f_1}{\partial L_1} - T \frac{\partial f_1}{\partial L_1} = \mu \cdot \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial L_2}.$$

Para que se satisfaga la relación (4) se debe entonces cumplir que

$$-T \frac{\partial f_1}{\partial L_1} = \mu \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial L_2}$$

es decir,

$$T = -\frac{\mu \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial L_2}}{\frac{\partial f_1}{\partial L_1}} = -\frac{p_2 \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial L_2}}{p_1 \frac{\partial f_1}{\partial L_1}} > 0.$$

En forma análoga podemos imaginar que la firma uno no percibe impuestos, pero que la firma dos es compensada vía un subsidio por el efecto que recibe. Queda propuesto modelar este caso.

Veamos ahora como interviene Coase. Para esto consideremos dos casos. El primero es que la firma uno tiene el derecho a contaminar pero debe compensar a la firma dos por los daños que recibe. El segundo, es que la firma dos tiene el derecho a ambiente libre de externalidad, pero que puede vender parte de su derecho a la firma uno.

Para el caso uno, notemos que la si la firma uno decide ocupar una cantidad L_1 del factor, entonces la demanda por factor de la firma dos viene de la condición

$$p_2 \cdot \frac{\tilde{f}_2(L_1, L_2)}{\partial L_2} = w,$$

lo que define una relación implícita $L_2 \equiv L_2(L_1)$ (obviamos por el momento los precios). De esto entonces, el máximo beneficio de la firma dos es

$$\pi_2(L_1) = p_2 \tilde{f}_2(L_1, L_2(L_1)) - wL_2(L_1).$$

Por lo tanto, si la firma uno no produce, el beneficio de la firma dos será $\pi_2(0)$. Luego, dado L_1 , perjuicio de la firma dos es

²⁴Se insiste que estamos en el supuesto que la externalidad que provoca la firma uno es negativa.

$$\Delta_2 = \pi_2(0) - \pi_2(L_1).$$

Precisamente este es el valor que debería entonces pagar la firma uno a la dos si desea producir. Con esto, el problema de la firma uno consiste entonces en

$$\max_{L_1} p_1 f_1(L_1) - wL_1 - [\pi_2(0) - \pi_2(L_1)],$$

cuyas condiciones de optimalidad implican que

$$p_1 \frac{\partial f_1}{\partial L_1} - w + \frac{\partial \pi_2}{\partial L_1} = 0. \quad (5)$$

La firma dos maximiza el beneficio incluyendo la compensación: $p_2 \tilde{f}_2(L_1, L_2(L_1)) - wL_2(L_1) + \pi_2(0) - \pi_2(L_1)$. Luego, la condición de optimalidad implica que

$$p_2 \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial L_2} - w = 0$$

por lo que

$$p_1 \frac{\partial f_1}{\partial L_1} + \frac{\partial \pi_2}{\partial L_1} = p_2 \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial L_2}. \quad (6)$$

Calculemos $\frac{\partial \pi_2}{\partial L_1}$. Del hecho que $\pi_2(L_1) = p_2 \tilde{f}_2(L_1, L_2(L_1)) - wL_2(L_1)$, aplicando regla de la cadena se tiene entonces que

$$\frac{\partial \pi_2(L_1)}{\partial L_1} = p_2 \cdot \left[\frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial L_1} + \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial L_1} \right] - w \frac{\partial L_2}{\partial L_1} = p_2 \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial L_1}$$

pues, por condición de optimalidad,

$$p_2 \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial L_2} = w.$$

Reemplazando en la ecuación (6) se tiene que

$$p_1 \frac{\partial f_1}{\partial L_1} + p_2 \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial L_1} = p_2 \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial L_2},$$

que es precisamente la condición que garantiza la optimalidad de las asignaciones. Concluimos entonces que en esquema donde la firma uno debe compensar a la firma dos por las externalidades que provoca, teniendo esta el derecho a dicha compensación, ocurre que las asignaciones resultantes son eficientes. Queda propuesto analizar el caso en que la firma dos debe compensar a la firma uno por imponer restricciones al uso del factor uno. Debe probar que se cumple exactamente lo mismo que hemos probado. Con todo esto se corrobora el Teorema de Coase.

4.2 Bienes públicos y equilibrio de Lindahl

Cuando (i) una manzana es consumida por un determinado individuo, se acabó la manzana y nadie nunca más podrá consumir dicha manzana. Cuando alguien ocupa (ii) una “balza pública” para cruzar un río, en el momento de ocuparla prohíbe el uso de la misma por cualquier otra persona (balza chica), pero una vez que la ha desocupado cualquier otro individuo puede hacer uso de la misma. Análogo con (iii) una balza por la cual hay que pagar algún peaje: el uso de ella en determinado momento prohíbe el uso de la misma por parte de cualquier otro individuo, pero una vez desocupada, cualquiera

que pague el peaje puede hacer uso. Por otro lado, (iv) la señal pública de TV es gratis para todos, a nadie le está prohibido su consumo y además cuando alguien disfruta la TV nada implica respecto de la calidad de la señal que otros pueden recibir. Finalmente, (v) en general a nadie le está prohibido pescar deportivamente en un lago, pero cuando lo hace ocurre que la cantidad de peces disponibles para el resto de los individuos claramente se ve modificada. Salvo el ejemplo (i), todos los otros dan cuenta de lo que en economía se denominan *bienes públicos*.

Un **bien privado** es bien tal que su consumo puede ser hecho por una única persona de manera que una vez consumido no puede ser aprovechado por otro individuo y que además dicho consumo no implica externalidades hacia los demás. Por otro lado, un **bien público** es simplemente un bien que puede ser consumido por más de un individuo, aunque no necesariamente en forma simultánea.

Los bienes públicos pueden a su vez ser clasificados según sean **rivales** o **excluyentes**. Un bien público se dice **no rival** si el consumo del mismo no reduce la cantidad disponible para otros individuos. Tal es el caso de la señal de TV del ejemplo (iv) anterior. Los peces del lago según el ejemplo (v) son bienes públicos rivales: son bienes públicos por que los peces pueden ser consumidos por cualquiera, son rivales ya que la cantidad de peces disponibles para el resto dependen de la cantidad de peces que uno de los pescadores haya pescado.

Un bien público se dice **no excluyente** si ningún individuo puede ser excluido de su consumo. Ejemplos de no exclusión son la balsa pública (ejemplo (ii)), la señal de TV (iv), y los peces del lago según el ejemplo (v). Un bien público excluyente es la balza privada del ejemplo (iii) anterior: es un bien público (puede ser consumido por varios individuos) pero es excluyente ya que se debe pagar por el uso.

Note que la naturaleza del bien público nada tiene que ver con sea el sector público que lo provea. La idea de público viene de la posibilidad que más de un agente haga uso y goce del mismo.

Ejemplo 4.3 El bien público “plaza” es no rival ni excluyente. El bien público “carretera concesionada” es un bien no rival pero excluyente: no es rival ya que el consumo de la carretera no implica que la carretera se acabe para el resto; es excluyente ya que para usarla se debe pagar. Sobre este mismo ejemplo, la “carretera libre” es un bien público no excluyente, que cuando tiene poca demanda (tráfico) puede ser considerado no rival. Sin embargo, ante una alta solicitud se convierte en un bien público rival o, como se plantea por algunos, parcialmente rival. De hecho, en economía se habla de la congestión como un fenómeno de rivalidad parcial. Finalmente, note que un bien público rival pero no excluyente son los peces de un lago según el ejemplo (v): es rival ya que el consumo por parte de algunos obviamente incide en la cantidad disponible para los otros; no es excluyente ya que difícilmente podríamos prohibir la pesca deportiva en determinado lago.

Usando los conceptos anteriores, los **bienes privados son simplemente aquellos que son rival ni excluyentes**: el consumo de un bien privado prohíbe el consumo del mismo por parte de otro individuo (rivalidad) y, por otro lado, su consumo no es ‘libre’ ya que se debe pagar por el mismo (excludabilidad).

Por lo anterior, el **bien público es entonces aquel que no es privado**, es decir, un bien tal que: (a) o no es ni rival ni excluyente, (b) o es rival pero no excluyente, (c) o es excluyente pero no rival. Ejemplo de (a) es la plaza, la balza pública anterior, la señal de TV abierta, etc.; ejemplo de (b) son los peces de un lago que son usados para pesca deportiva; ejemplo de (c) es la “balza privada” anterior: no es rival ya que el uso de la balza por alguien no prohíbe el uso de la misma por otro, es excluyente ya que se debe pagar por el uso, de tal forma que no todos pueden acceder a la misma. El siguiente cuadro resume la **nomenclatura** que existe al respecto:

	<i>Rival</i>	<i>No Rival</i>
<i>No Excluyente</i>	Bien Público Puro	“Recursos Comunes”
<i>Excluyente</i>	Bien de club	Bien privado

En todo lo que sigue, **trabajaremos con bienes públicos puros** y consideremos un modelo simple donde en la economía hay sólo dos bienes: uno privado y uno público que elabora una firma a partir de bien privado. Asumimos que hay m consumidores que consumen los bienes privado y público. Las dotaciones iniciales de bien privado del consumidor $i \in I = \{1, 2, \dots, m\}$ son $\omega_i \in \mathbb{R}_+$ y la función de utilidad del tipo es u_i . El bien público puro se asume deseable por todos los individuos. Por lo tanto, si $y \in \mathbb{R}_+$ denota la cantidad de bien público disponible, entonces de la no rivalidad y la no exclusión del mismo, la cantidad que consume cada individuo es precisamente y . Dado esto, si $x_i \in \mathbb{R}_+$ denota el consumo privado, la utilidad del tipo $i \in I$ es simplemente $u_i(x_i, y)$.

Finalmente, denotemos por f la función de producción que elabora bien público a partir de bien privado. Así, dada una cantidad x_i^G de bien privado aportado por cada individuo para efectos de la producción de bien público, resulta entonces que la cantidad disponible del mismo en el mercado es

$$y = f\left(\sum_{i \in I} x_i^G\right).$$

Con esto, **dadas las contribuciones del resto de los individuos**, asumiendo que el bien privado tiene precio unitario (numerario), el problema del consumidor $i \in I$ es entonces

$$\begin{cases} \max_{x_i, x_i^G} u_i(x_i, y) \\ \text{s.a.} & x_i + x_i^G = \omega_i \\ & y = f\left(x_i^G + \sum_{j \in I \setminus \{i\}} x_j^G\right) \end{cases}$$

es decir, dado lo que los otros están haciendo en materia de bien público, el problema es escoger la cantidad de bien público y privado conducente a maximizar la función de utilidad anterior. Sea $\delta_{-i} = \sum_{j \in I \setminus \{i\}} x_j^G$. Dado esto, el problema del individuo $i \in I$ se puede re-escribir como

$$\max_{x_i^G} u_i\left(\omega_i - x_i^G, f\left(x_i^G + \delta_{-i}\right)\right)$$

La imponer las condiciones de optimalidad sigue que

$$-\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x_i^G} = 0,$$

es decir,

$$\frac{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}}{\frac{\partial u_i}{\partial y}} = \frac{\partial f}{\partial x_i^G},$$

es decir, que la relación marginal de sustitución entre bien público y privado es igual al producto marginal que se tiene con el aporte individual de bien privado para la provisión de bien público. Esta última se puede entender a su vez como la relación marginal de transformación entre bien público y bien privado.

Obviamente que lo anterior es condicionar al aporte que han hecho los otros individuos. Esto no altera el análisis que sigue. Lo relevante es que, desde el punto de vista privado, en el óptimo se cumple la igualdad anterior. Veamos ahora si la forma de provisionar bien público a partir de las decisiones

privadas como la anterior es eficiente. Recordemos que para hablar de eficiencia necesitamos definir una función de utilidad social. Sean entonces una función de utilidad social de la forma

$$U = \sum_{i \in I} \alpha_i u_i.$$

Dado esto, el problema social para determinar la provisión óptima de bien público es

$$\begin{cases} \max_{x_i, z} U(x_1, x_2, \dots, x_m, y) \\ \text{s.a.} \quad \sum_{i \in I} x_i + z = \sum_{i \in I} \omega_i \\ y = f(z) \end{cases}$$

Para imponer las condiciones de optimalidad, al reemplazar la segunda restricción en la función objetivo, resulta que el Lagrangeano del problema es

$$L = \sum_{i \in I} \alpha_i u_i(x_i, f(z)) + \lambda \left[\sum_{i \in I} x_i + z - \sum_{i \in I} \omega_i \right]$$

por lo que las condiciones de optimalidad son

$$\alpha_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \lambda = 0$$

$$\sum_{i \in I} \alpha_i \frac{\partial u_i}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda = 0.$$

De la primera ecuación,

$$\alpha_i = -\frac{\lambda}{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}},$$

que reemplazando en la segunda implica que

$$\sum_{i \in I} -\frac{\lambda}{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}} \frac{\partial u_i}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda = 0 \Leftrightarrow \sum_{i \in I} \frac{\frac{\partial u_i}{\partial y}}{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}} = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

Como la recíproca de la relación marginal de sustitución entre a y b es la relación marginal entre b y a , lo anterior nos dice que, desde el punto de vista social, la condición que se debe satisfacer en el óptimo es que **la suma de las relaciones marginales de sustitución entre bien público y bien privado es igual a la relación marginal de transformación entre bien público y bien privado** (las recíprocas de las relaciones marginales de sustitución entre bien privado y bien público!). Claramente esta última condición no tiene nada que ver con la “condición privada” que ya habíamos obtenido. La relación obtenida se denomina **condición de Lindahl - Samuelson** para determinar la cantidad óptima de bien público en un determinado mercado.

Una forma de “intuir” el por qué la diferencia entre las condiciones sociales y privada según lo anterior viene del hecho que, desde el punto de vista privado, a cada individuo le conviene que sea su vecino quién haga el sacrificio en bienes privados para financiar un bien público, el cual, ex post, puede utilizar sin problemas. Esto es, ni más ni menos, que el denominado problema del “free rider” en economía.

En lo que sigue, vamos a introducir un mecanismo de mercado que nos lleve al óptimo de provisión de un bien público. El concepto de equilibrio que vamos a definir es aquel de Lindahl. Para ello, la idea es simplemente que cada individuo pague por el bien público según la idea que cada individuo internalice el costo del bien público y no pueda actuar como free rider según lo ya mencionado. Para

definir el equilibrio de Lindahl, se parte del principio que el pago por determinado bien público está asociado a la disposición a pagar que cada individuo tiene. Así, uno puede suponer que aun cuando en el equilibrio cada consumidor consume la misma cantidad de bien público, no es menos cierto que cada uno de ellos paga un precio distinto por el mismo. Por ejemplo, si un consumidor $i \in I$ es cargado con un precio p_i por el bien público, asumiendo que el precio del bien privado es uno (numerario), ocurre entonces que el problema del consumidor $i \in I$ es escoger la cantidad óptima de bien privado y público con el fin de resolver

$$\begin{cases} \max_{x_i, y} & u_i(x_i, y) \\ \text{s.a} & x_i + p_i y = \omega_i. \end{cases}$$

Al despejar x_i en función de y y reemplazar en la función objetivo, el problema anterior equivale a

$$\max_y u_i(\omega_i - p_i y, y)$$

y luego, de las condiciones de optimalidad se tiene que

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}(-p_i) + \frac{\partial u_i}{\partial y} = 0 \Rightarrow p_i = \frac{\frac{\partial u_i}{\partial y}}{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}}.$$

Para la producción del bien público, la firma compra los factores a los consumidores (precio igual a uno) y vende el bien público. El pago que recibe es igual a la suma de las disposiciones a pagar por cada consumidor. Por lo tanto, el problema de la firma es (función de producción f)

$$\max_z \left(\sum_{i \in I} p_i \right) f(z) - z$$

por lo que, al imponer condiciones de optimalidad,

$$\sum_{i \in I} p_i \frac{\partial f}{\partial z} - 1 = 0 \Rightarrow \sum_{i \in I} p_i = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

Reemplazando p_i del problema del consumidor en la ecuación anterior, tenemos que

$$\sum_{i \in I} \frac{\frac{\partial u_i}{\partial y}}{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}} = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z}},$$

que es precisamente la condición de optimalidad que teníamos para obtener asignaciones eficientes de bienes públicos. De esta manera, al cargar un precio personalizado a cada consumidor según lo anterior, en el equilibrio de la economía ocurre que la asignación de bienes públicos es eficiente. Esto motiva la siguiente definición. Precisamente las asignaciones de precios personalizados p_i y las consiguientes asignaciones de recursos en la economía conforman lo que se denomina un **equilibrio de Lindahl** para nuestra economía. Obviamente este concepto puede ser extendido a una economía general, con productores y consumidores arbitrarios. No es objetivo de este curso detallar el modelo general. El modelo simple anterior tiene toda la riqueza de lo que necesitamos en este curso.

5 Ejercicios propuestos

Ejercicio 5.1

1. Determine la curva de contrato cuando las funciones de utilidad son $u_1(x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$ y $u_2(x, y) = x^\beta y^{1-\beta}$, esto asumiendo que las dotaciones iniciales son $\omega_1 = (1, a) \in \mathbb{R}^2$ y $\omega_2 = (b, 1) \in \mathbb{R}^2$.

2. Muestre formalmente que todo equilibrio de Walras en una economía de 2×2 es un óptimo de Pareto (Primer Teorema de Bienestar).
3. Determine, si existe, el precio de equilibrio y las asignaciones de equilibrio de una economía donde $u_1(x, y) = [x^a + \mu y^a]^{1/a}$ y $u_2(x, y) = [x^b + \rho y^b]^{1/b}$, siendo las dotaciones iniciales $\omega_1 = (0, R) \in \mathbb{R}^2$ y $\omega_2 = (R, 0) \in \mathbb{R}^2$.
4. Consideremos una economía de 2×2 y asumamos que los individuos tienen la misma función de utilidad $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha \cdot x_2^{1-\alpha}$, con $\alpha \in]0, 1[$. Asumamos además que las dotaciones iniciales son $\omega_1 = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$ y $\omega_2 = (40, 40) \in \mathbb{R}^2$. Determine entonces el precio de equilibrio y muestre que la razón de ingresos en el equilibrio es $1 : 40$. Suponga ahora que un planificador central decide recolectar la mitad de todos los recursos de la economía y devolverlos de acuerdo a un porcentaje prefijado. Sea $r \in [0, 1]$ la fracción (porcentaje) de los recursos que se devuelven al individuo uno (por lo tanto el individuo dos recibe $(1 - r)$ del total recolectado). Determine el nuevo precio de equilibrio y muestre entonces que la razón de ingresos en el nuevo equilibrio es dado por

$$IR(r) = \frac{I_2(r)}{I_1(r)} = \frac{81 - 41r}{1 + 41r}.$$

Ejercicio 5.2 Suponga una economía formada por dos consumidores y un único bien. Asumamos que la utilidad de cada individuo depende de lo que consume pero además de lo que el otro consume. Denotemos por x_i el consumo del individuo $i = 1, 2$ y suponga que las funciones de utilidad de cada uno de ellos es

$$u_1(x_1) = \begin{cases} x_1 & \text{si } x_2 \geq x_1/2 \\ \sqrt{x_1 x_2} & \text{si } x_2 < x_1/2 \end{cases}$$

$$u_2(x_2) = \begin{cases} x_2 & \text{si } x_1 \geq x_2/2 \\ \sqrt{x_1 x_2} & \text{si } x_1 < x_2/2. \end{cases}$$

Partiendo de la base que la cantidad total del bien es $\omega \in \mathbb{R}_{++}$, determine la(s) asignación(es) eficientes en esta economía.

Ejercicio 5.3 Considere una economía con dos consumidores y una firma, la que produce exclusivamente un bien público. Cada individuo posee como dotación inicial una unidad de trabajo. Suponga que la tecnología de producción del bien público es $y = L$, siendo L la cantidad de trabajo empleado en su producción. Las funciones de utilidad de cada individuo son

$$u_1(L_1, y) = (1 - L_1)y, \quad u_2(L_2, y) = (1 - L_2)y^3.$$

Dado lo anterior, determine entonces el conjunto de óptimos de Pareto de esta economía. Determine además las funciones de demanda de cada individuo y determine el (los) equilibrios de Lindahl de esta economía.

Suponga ahora que la empresa que produce el bien público es propiedad del individuo dos y que la tecnología de producción es

$$y = L_1 + \frac{L_2}{3}.$$

Determine entonces el conjunto de asignaciones eficientes de la economía y calcule el (los) equilibrios de Lindahl correspondientes.

Ejercicio 5.4 Considere una economía con dos bienes y tres consumidores. Denotemos por x_{ij} el consumo del bien $j = 1, 2$ por parte del individuo $i = 1, 2, 3$ y suponga que las funciones de utilidad de estas personas son dadas por $u_1 = x_{11}^{1/2} + x_{12} + x_{21}^{1/2}$, $u_2 = x_{21}^{1/2} + x_{22} + x_{11}^{1/2}$, $u_3 = x_{31}^{1/2} + x_{32}$. Suponga que todos los consumidores tienen las mismas dotaciones $\omega_i = (9, 10)$, $i = 1, 2, 3$. Calcule entonces el equilibrio competitivo de esta economía de intercambio y muestre que la asignación de equilibrio no es Pareto eficiente. Cómo se podrían obtener asignaciones Pareto óptimas en el contexto anterior. Explique y desarrolle.

Ejercicio 5.5 Una tienda de ropa (R) y una joyería (J) están situadas la una junto a la otra. Sean x el gasto en publicidad de la tienda de ropa y $C_R(x) = x^2/100$ la función de costos de dicha tienda. Sean y el gasto en publicidad de la joyería y $C_J(y, x) = y^2/100 - x$ su función de costos. Los beneficios de estas tiendas vienen descritos por las funciones: $\pi_R = 2x - C_R(x)$ y $\pi_J = 3y - C_J(y, x)$.

Calcule entonces la decisión óptima de gasto en publicidad de cada tienda. Suponga ahora que ambas tiendas se fusionan. Cuál será entonces el gasto en publicidad de la nueva tienda? Cuál es el nivel de impuesto o subvención que se debe fijar para que el nivel de publicidad sea eficiente bajo el supuesto que no se fusionan?

Ejercicio 5.6 Un aeropuerto está situado junto a un gran terreno propiedad de un agente inmobiliario. Cuanto mayor es el número de aviones, mayores son los costos de la inmobiliaria para vender sus departamentos. Sea x el número de aviones, sea y el número de edificios. Los costos del aeropuerto vienen dados por $C_A(x) = x^2$ y su beneficio por $\pi_A = 48x - C_A(x)$. Los costos de la inmobiliaria son dados por $C_I(y, x) = y^2 + xy$ y su beneficio por $\pi_I = 60y - C_I(y, x)$. Bajo lo indicado, calcule entonces el número de edificios que construirá la inmobiliaria. Suponga ahora que autoridad local prohíbe el aeropuerto, cuántos edificios se construirán en dicho escenario? Si el aeropuerto tiene que compensar a la agencia inmobiliaria por los daños que le produce, cuál será el número de aviones que el aeropuerto permitirá circular? Qué nivel de impuesto se debe fijar para que el número de aviones que se permitan sea el eficiente?