Guía de resolución Control 1 CI43B/CI73H/IN78O
Semestre Primavera 2006

Pregunta 1

De la ecuación de Slutsky para un bien con respecto a su propio precio:

$$\frac{\partial X_i}{\partial P_i} = \frac{\partial H_i}{\partial P_i} - X_i \frac{\partial X_i}{\partial I}$$

Tomando en cuenta que $\frac{\partial X_i}{\partial I} \geq 0$ si el bien es normal, y que las otras dos derivadas que aparecen son negativas, se tendrá que la demanda compensada bajará menos que la demanda de mercado al aumentar el precio. Dicho de otro modo, la demanda compensada subirá menos que la demanda de mercado al bajar el precio.

Pregunta 2

$$e(P,U) = U \sum_j \delta_j P_j$$

Si se considera el nivel de ingreso tal que $e(P,U) = I$, se tendrá que $V(P, e(P,U)) = U$. Así, se puede invertir la ecuación anterior en el nivel de utilidad, obteniendo:

$$V(P,I) = \frac{I}{\sum_j \delta_j P_j}$$

De la identidad de Roy: $-\frac{\frac{\partial V}{\partial P_i}}{\frac{\partial V}{\partial I}} = X_i$. En este caso:

$$X_i = -\frac{\frac{-I\delta_i}{(\sum_j \delta_j P_j)^2}}{\frac{1}{\sum_j \delta_j P_j}} = \frac{I\delta_i}{\sum_j \delta_j P_j}$$

Pregunta 3

3.a

Considerando como X_{ij} al nivel de consumo del bien j, usado en la actividad i, la condición puede escribirse (dentro de un modelo $U(X,T)$) como:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial T_i X_{ji}} \geq 0 \tag{0.1}$$

Indicando que la utilidad marginal de realizar la actividad i-ésima aumenta al aumentar el consumo del bien j, en dicha actividad.

3.b

En un modelo del tipo $\max U(X,T)$, la consideración puede escribirse como una familia de restricciones adicionales (aparte de las conocidas de tiempo e ingreso).

$$X_i \geq f_i(T)$$

Donde la función f_i indica el nivel mínimo de consumo de X_i necesario para desarrollar el patrón de actividades T.

Pregunta 4

4.a

El modelo de comportamiento puede escribirse como sigue:

$$\max U(G, W, T_V, F, R)$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} W - W_f \geq 0 & \qquad (\kappa) \\ I + w(W - W_f) - G - 100\lceil F/10 \rceil \geq 0 & \qquad (\lambda) \\ \tau - W - T_V - F - R = 0 & \qquad (\mu) \end{aligned}$$

La primera restricción es la de tiempo mínimo de trabajo (las otras actividades no tienen restricción de tiempo), la segunda restricción es la presupuestaria (observar que uno puede comprar una ficha y jugar sólo 2 minutos), y la tercera restricción es la de tiempo total disponible.

4.b

Del Lagrangeano del problema anterior, derivando con respecto al tiempo de trabajo, se obtiene:

$$\frac{\partial U}{\partial W} + \kappa + w\lambda - \mu = 0$$

Si la restricción de tiempo mínimo es inactiva, $\kappa = 0$, luego el valor de asignar tiempo al trabajo será:

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial W}}{\lambda} = \frac{\mu}{\lambda} - w$$

Pregunta 5

5.a

Una condición para que el beneficio a usuarios tenga forma exacta es que:

$$\frac{\partial X_i}{\partial P_j} = \frac{\partial X_j}{\partial P_i}$$

Si se tiene la probabilidad que un individuo h escoja la alternativa i, se espera que de un total de N individuos, el número X_i (los que eligen i) sea:

$$X_i = NP_{hi} = N\frac{V_{hi}}{\sum_j V_{hj}}$$

Se supone una función V lineal en el precio y las características de la alternativa ($V_{hi} = \alpha_h P_i + \sum_k \beta_{hk} q_{ik}$). Derivando:

$$\frac{\partial X_i}{\partial P_j} = N\frac{\frac{\partial V_{hi}}{\partial P_j}\sum_j V_{hj} - \frac{\partial \sum_k V_{hk}}{\partial P_j}V_{hi}}{\left(\sum_j V_{hj}\right)^2}$$

Observar que el término de la izquierda es cero. Dada la expresión para V_{hi}, el resultado de la derivada es:

$$\frac{\partial X_i}{\partial P_j} = -N\left(\frac{\alpha_h V_{hi}}{\left(\sum_k V_{hk}\right)^2}\right)$$

Expresión no simétrica en general para i y j. Las derivadas cruzadas $\frac{\partial X_i}{\partial P_j}$ y $\frac{\partial X_j}{\partial P_i}$ no coincidirán, luego **no es posible** calcular el beneficio de manera exacta.

5.b

Es posible utilizar la regla del medio en este caso:

$$\Delta EMC \approx \frac{1}{2}\sum_i (P_i^0 - P_i^1)(X_i^0 + X_i^1)$$

Donde $X_i^j = N\frac{V_{hi}^j}{\sum_k V_{hk}^j}$.

Pregunta 6

Del modelo de De Serpa:

$$\frac{\kappa_i}{\lambda} = \frac{\mu}{\lambda} - \frac{\frac{\partial U}{\partial T_i}}{\lambda}$$
$$\frac{\mu}{\lambda} = w + \frac{\frac{\partial U}{\partial T_W}}{\lambda}$$

Donde la primera expresión se obtiene de derivar el Lagrangeano con respecto al tiempo asignado a una actividad T_i cualquiera, y la segunda de derivarlo con respecto a la actividad "trabajo". Uniendo ambas relaciones:

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial T_i}}{\lambda} = w + \frac{\frac{\partial U}{\partial T_W}}{\lambda} - \frac{\kappa_i}{\lambda}$$

Suponiendo una actividad de ocio, $\kappa_i = 0$, con lo que queda:

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial T_i}}{\lambda} = w + \frac{\frac{\partial U}{\partial T_W}}{\lambda}$$

De donde se observa que, en el caso que el individuo valore positivamente en el margen su trabajo ($\frac{\partial U}{\partial T_W} > 0$), la valoración del tiempo asignado a la actividad i será más que la tasa salarial.

Pregunta 7

Se pregunta por la comparación entre los $\frac{\kappa_i}{\lambda}$ para dos individuos distintos. Se usarán superíndices para denotar a cada uno de ellos.

Del modelo de De Serpa:

$$\frac{\kappa_{tr}^1}{\lambda^1} = w^1 + \frac{\frac{\partial U^1}{\partial T_W}}{\lambda^1} - \frac{\frac{\partial U^1}{\partial T_{tr}}}{\lambda^1}$$
$$\frac{\kappa_{tr}^2}{\lambda^2} = w^2 + \frac{\frac{\partial U^2}{\partial T_W}}{\lambda^2} - \frac{\frac{\partial U^2}{\partial T_{tr}}}{\lambda^2}$$

Es claro ver que la disponiblidad a pagar por disminuir el tiempo de trámites no depende sólo del ingreso del individuo (por medio de los λ^k y los w^k -que actúan en la misma dirección-), sino que también de sus disgustos por hacer los trámites, y de su gusto o disgusto por el trabajo (que actúa cambiando el valor del tiempo como recurso).

Comentarios a *rodcontr@ing.uchile.cl*