



## Teoría de Carteras

Primavera 2005

J. Miguel Cruz

## Teoría de Portafolios

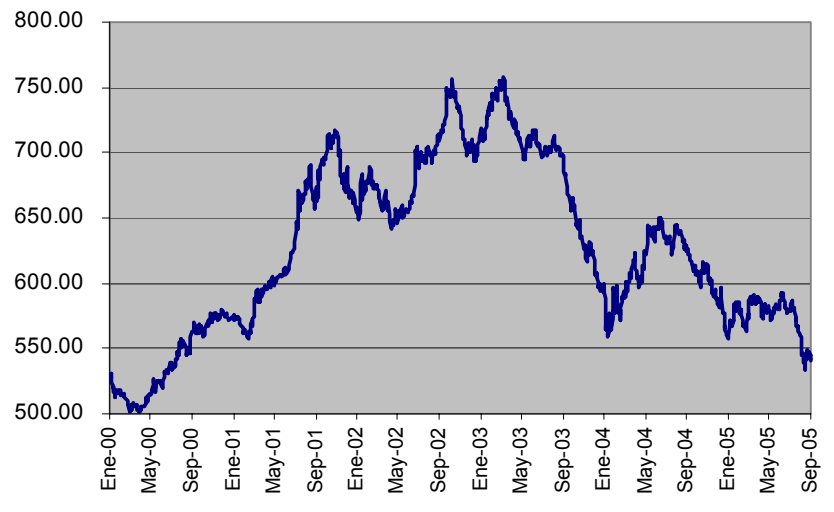
- **Visión General**
- **Medición del Riesgo**
  - Aversión al riesgo
  - Riesgo=varianza del portafolio o desviación estándar
- **Cálculo de la varianza**
  - Dos activos
  - Muchos activos
- **Portafolio eficientes**



IN56A

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile  
Primavera 2005

## Ejemplo Variable Aleatoria: Tipo de Cambio



IN56A

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile  
Primavera 2005

## Estadísticas sobre una variable aleatoria

### Media

$E(x)$  y se estima  $(1/T)(x_1+x_2+\dots+x_T)$

$$\mu = \frac{1}{T} \cdot \sum_{i=1}^{i=T} x_i$$

### Varianza

$V(x)$  o  $\sigma^2(x)$  y se define  $E(x^2) - [E(x)]^2$

$$\sigma^2 = \frac{1}{(T-1)} \cdot \sum_{i=1}^{i=T} (x_i - \mu)^2$$

### Desviación Estándar

Dispersión medida en las mismas unidades que la variable original.

$\sigma(x)$

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\sigma^2(x)}$$

### Otras

- Mínimo
- Máximo
- Mediana
- ...

IN56A

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile  
Primavera 2005

## Modelamiento de series de tiempo

### Modelo Aditivo

- Modelando la serie de precios Tipo de Cambio
- Supongamos que la distribución es normal, entonces:

$$\tilde{P}_{t+1} = P_t + \tilde{\varepsilon}_t$$

↑                      ↑                      ↑  
Precio futuro      Precio conocido      “Ruido” en el sistema que  
se distribuye de acuerdo  
a una normal

El problema estadístico es entonces estimar el valor promedio y la desviación estándar del ruido o proceso estocástico

IN56A

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile  
Primavera 2005

**Sin embargo este modelo implica precios normales y puede generar precios negativos...**

### Modelo Aditivo

- Esto es equivalente a que el incremento de precios se distribuya en forma normal.

$$\tilde{P}_{t+1} - P_t = \tilde{\varepsilon}_t$$

↑                      ↑                      ↑  
Precio futuro      Precio conocido      “Ruido”

$$\varepsilon_t \rightarrow N(0, \sigma^2)$$

IN56A

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile  
Primavera 2005

## Un modelo más usado en finanzas

**Se modela la tasa de cambio instantánea del precio:**

## Modelo Multiplicativo

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{P}_{t+1} & = & P_t & \times & e^{\tilde{\varepsilon}_t} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{Precio futuro} & & \text{Precio conocido} & & \text{“Ruido” multiplicativo} \end{array}$$

$$\varepsilon_t \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$$

## Aproximación usada en finanzas

Para pequeños intervalos de tiempo, el cambio porcentual es equivalente al logaritmo del retorno.

## Modelo Multiplicativo

$$\frac{\tilde{P}_{t+1} - P_t}{P_t} \approx Ln\left(\frac{\tilde{P}_{t+1}}{P_t}\right) = \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$$

## Estimación de Parámetros

- Objetos de análisis

$$r_t = \text{Ln}\left(\frac{\mathbf{P}_t}{\mathbf{P}_{t-1}}\right)$$

- Volatilidad

$$\sigma = \text{DesvEst}\left\{\text{Ln}\left(\frac{\mathbf{P}_t}{\mathbf{P}_{t-1}}\right)\right\}$$

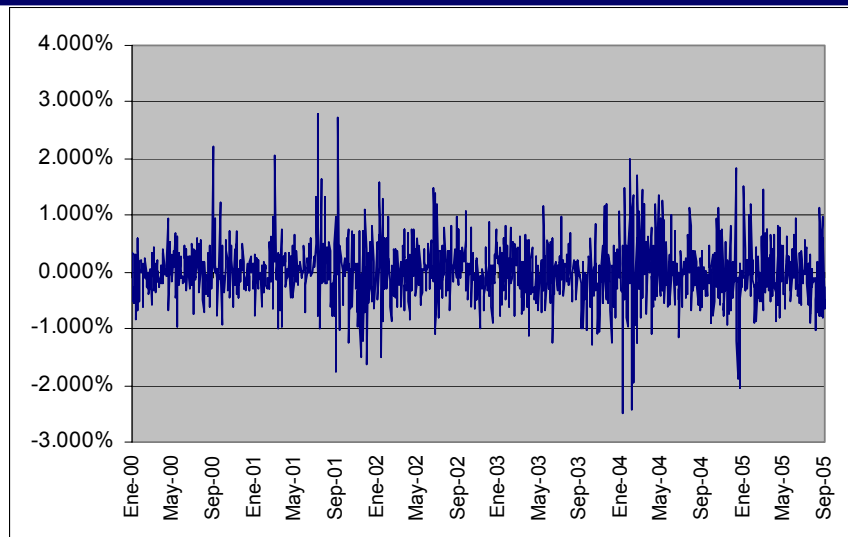
- Media o Tendencia

- ¿Es una buena estimación?  $\mu = \text{E}\left\{\text{Ln}\left(\frac{\mathbf{P}_t}{\mathbf{P}_{t-1}}\right)\right\}$

IN56A

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile  
Primavera 2005

## Ejemplo: Retornos Log diarios del Tipo de Cambio



IN56A

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile  
Primavera 2005

## Volatilidad

- **Concepto de volatilidad:**
  - mide las desviaciones pasadas respecto de la media o tendencia
  - Se calcula como la desviación estándar de los cambios porcentuales de las tasas
  - Tiene asociado un período (diaria, mensual, anual)
  - Generalmente se calcula con ponderador mayor para la historia reciente



IN56A

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile  
Primavera 2005

## Estimación de la volatilidad

- **Disponer de serie de tiempo**
- **Cálculo del retorno logarítmico (porcentual)**
- **Calcular desviación estándar:**
  - Directamente toda la muestra
  - Medias móviles
  - Estimación recursiva con ponderación histórica ( $\lambda=0,94$ )



IN56A

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile  
Primavera 2005

## Fórmulas de la volatilidad (Caso retorno medio=0)

### ■ Ecuación tradicional:

- Requiere fijar t observaciones

$$\sigma_{t+1} = \sqrt{\frac{1}{t-1} \sum_{i=1}^t (r_i)^2}$$

### ■ Fórmula alternativa:

- Recursiva:

$$\sigma_{t+1} = \sqrt{\lambda \sigma_t^2 + (1-\lambda) r_{t+1}^2}$$

$\sigma_{t+1}$ : Es la predicción de volatilidad del factor de riesgo, para el período t+1, considerando la información conocida hasta el período t.

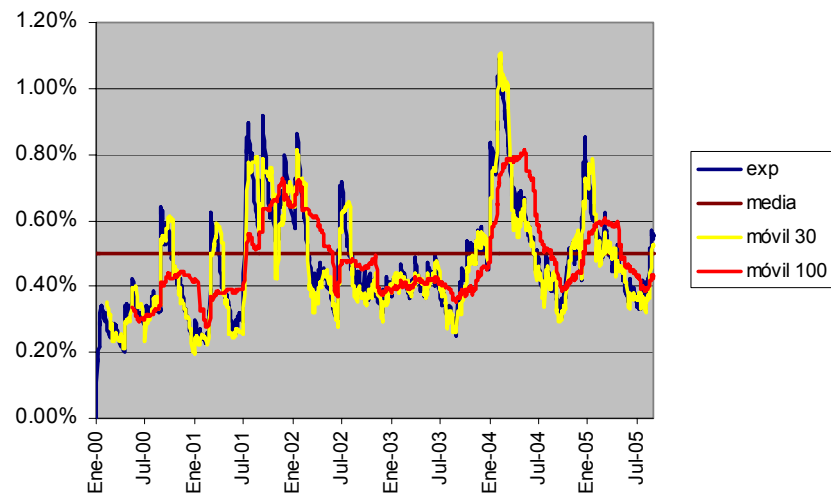
$\lambda$ : Es el factor de decaimiento que pondera los valores históricamente más recientes. El valor recomendado de 0,94.

$r_t$ : Es el retorno log del factor de riesgo en el período t

IN56A

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile  
Primavera 2005

## Volatilidad diaria Tipo de Cambio



IN56A

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile  
Primavera 2005

## Volatilidad crece con la raíz del tiempo

- Supuesto es que la variable de riesgo tiene una distribución simple (sin autocorrelación) de varianza instantánea constante. Luego la varianza de  $t$  períodos es proporcional a  $t$ , y la volatilidad (desviación estándar) es entonces proporcional a la raíz de  $t$ .
- Si  $r(k)$  es el retorno  $k$  períodos hacia adelante entonces la varianza de  $r(k)$  es  $k$  veces la varianza de  $r$ .

$$r_t(k) = r_t + r_{t+1} + r_{t+2} \dots + r_{t+k-1}$$



IN56A

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile  
Primavera 2005

## La distribución normal

- Simétrica: Probabilidad de subir es igual a la de bajar
- Movimientos en las cercanías del valor medio son mucho más probables: Un 68,3% de las posibles realizaciones se encuentran entre el valor medio +/- una desviación estándar. Este porcentaje se eleva a 95,4% para dos desviaciones estándares.
- Su fórmula es conocida, y es de fácil manejo analítico.
- “Aparece en la naturaleza” (Teorema Central del Límite Suma de variables aleatorias iid tiende a una distribución normal)



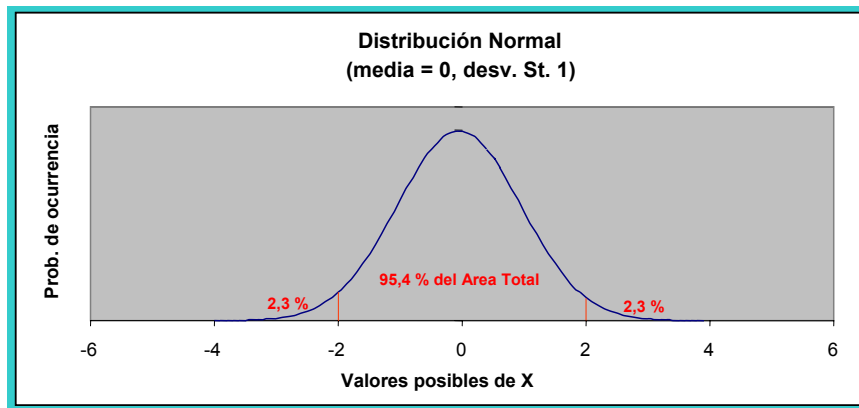
IN56A

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile  
Primavera 2005



## Supuesto importante: retornos log tienen una distribución normal.

- El argumento más usado es que si bien el retorno de activos no son exactamente normales, la distribución de grandes portafolios se acerca mucho a una normal.



IN56A

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile  
Primavera 2005

## Cuando hay más de una variable aleatoria

Se debe estudiar la “Distribución de Probabilidad Conjunta”

La combinación de dos o más variables aleatorias tiene su propia distribución de probabilidad

Valor esperado de la suma = suma de los valores esperados

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

Varianza de la suma = suma de las varianzas más 2 veces la covarianza entre las variables.

$$\sigma^2(X+Y)=\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)+2Cov(X,Y)$$

IN56A

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile  
Primavera 2005

## Varianzas y Covarianzas

Dos conceptos nuevos aparecen:

$$\text{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$\text{Corr}(X,Y) = \text{Cov}(X,Y) / \sigma(X)\sigma(Y) = \rho_{XY}$$

Ejemplo: Volatilidad PRC 8 años **0,482%**  
Volatilidad Tipo de Cambio **0,364%**

Matriz de correlaciones:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,00410 \\ 0,00410 & 1 \end{bmatrix}$$

Nota: Todas estas funciones están fácilmente disponibles en Excel

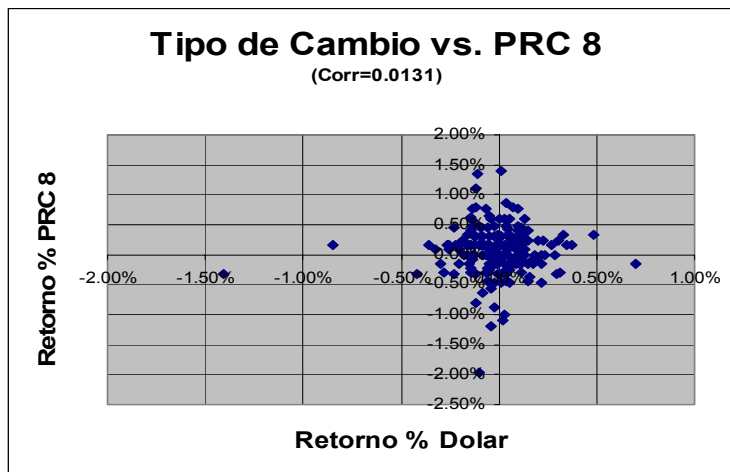


IN56A

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile  
Primavera 2005

## Ejemplo de Distribución multivariada

Ejemplo: Tipo de cambio y tasa PRC 8 años

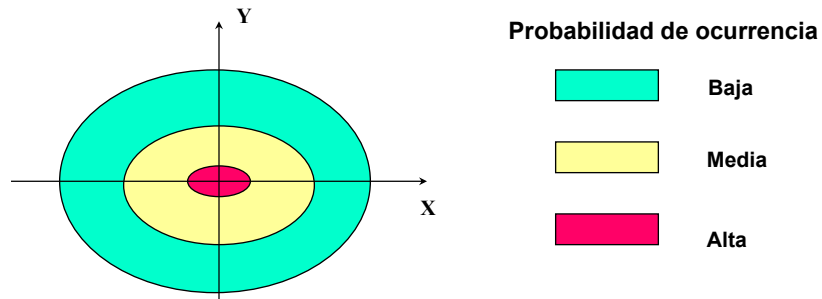


IN56A

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile  
Primavera 2005

## Distribución normal multivariada

- Suma de variables aleatorias normales es también normal (multiplicación de normales no es normal)
- Describen con una serie de valores esperados y una matriz de varianza-covarianza



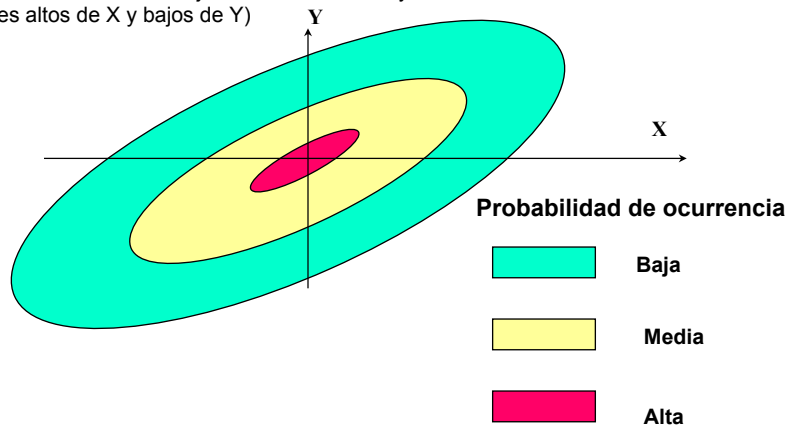
IN56A

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile  
Primavera 2005

## Efecto correlación entre dos variables

### Caso de correlación positiva entre X e Y

(Valores altos de X e Y en conjunto ocurren con mayor frecuencia que valores altos de X y bajos de Y)



IN56A

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile  
Primavera 2005

## Riesgo

- **Definición**
  - Variabilidad
  - Impacto negativo
- **Ejemplo**

Compro  
Acción \$100

}

Precio sube a \$110  
Gano \$10

Precio baja a \$90  
Pierdo \$10

Y si mi alternativa es invertir 100 al 5%?

IN56ADepartamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile  
Primavera 2005

## Variabilidad siempre negativa?

Corredora por  
un costo de \$2  
me asegura un  
precio mínimo  
de \$100

}

Precio sube a \$110  
Gano  $\$10 - \$2 = \$8$

Precio baja a \$90  
Pierdo \$2

Separar variabilidad del impacto que esta tienen sobre  
variables de decisión (sobre la riqueza)

- Volatilidad
- Aversión al riesgo

IN56ADepartamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile  
Primavera 2005

### Actitudes frente al riesgo

- Aversos
- Neutros
- Amantes

**Inversión 1**

**Inversión 2**

Supongamos que

$$R(1+r) = E(\text{Riqueza Final}) = pR1 + (1-p)R2$$

Cuál inversión es preferible?

IN56A

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile  
Primavera 2005

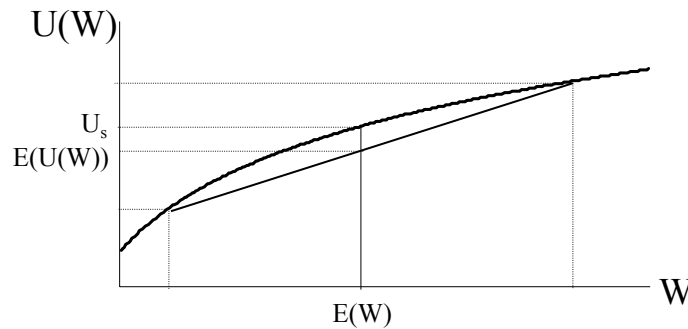
### Supuestos fundamentales para la incorporación del riesgo en la valorización de activos.

- Antes de comenzar a estudiar la incorporación del riesgo en la valorización de activos, debemos sentirnos cómodos con los siguientes supuestos el análisis:
  - Los inversionistas son aversos al riesgo
  - Utilizaremos la varianza (o desviación estándar) como instrumento para medir riesgo.
  - La distribución de los retornos tienen una distribución normal.

## Aversión al riesgo

- Los inversionistas no asignan el mismo valor a todos los resultados posibles.

- Entre mayor sea su riqueza, menor el valor asignado a cada dólar adicional.
- El siguiente gráfico muestra esta constatación



IN56A

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile  
Primavera 2005

## Fijando el horizonte de análisis, nos concentramos en N activos riesgosos

- Variable aleatoria es el retorno entre  $t$  y  $t+1$  de los diferentes activos:

$$\tilde{\mathbf{R}} \rightarrow N(\mathbf{R}_e, \Sigma)$$

donde  $\mathbf{R}_e$  es el vector de retornos esperados y  $\Sigma$  es la matriz varianza covarianza.

El vector de retornos aleatorios se define como:

$$[\tilde{\mathbf{R}}]_i = \tilde{r}_i = \ln\left(\frac{\tilde{P}_{i,t+1}}{P_{i,t}}\right)$$

con  $[\mathbf{R}_e]_i = E(\tilde{r}_i)$ , y  $[\Sigma]_{ij} = \text{cov}(\tilde{r}_i, \tilde{r}_j)$

IN56A

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile  
Primavera 2005

## Definimos una cartera o portafolio como una selección de activos

- Una cartera es un vector  $w$  de porcentajes invertidos en cada uno de los activos

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad w^T \cdot \vec{1} = \sum_{i=1}^N w_i = 1$$

- La cartera tiene un retorno esperado  $r$ :

$$w^T \cdot R_e = \sum_{i=1}^N w_i \cdot \bar{r}_i = r$$

- y una varianza  $\sigma^2$ :

$$w^T \cdot \Sigma \cdot w = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i \cdot w_j \cdot \sigma_{ij} = \sigma^2$$



IN56A

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile  
Primavera 2005

## Ejemplo de un portafolio

- Supongamos que tenemos el siguiente portafolio de dos acciones (Endesa y Copec)

	Endesa	Copec
Retorno Esperado (r)	15%	21%
Varianza	784	1764
Desviación Estándar	28%	42%
Peso en Portafolio	60%	40%

- El retorno esperado de este portafolio es igual a:

$$r_p = w_1 r_1 + w_2 r_2 = (0.6 * 15) + (0.4 * 21) = 17.4\%$$



IN56A

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile  
Primavera 2005

## La volatilidad del portafolio entre Endesa y Copec se calcula como:

### ■ Varianza del portafolio =

	$w_1$	$w_2$
$w_1$	$w_1^2 \sigma_1^2$	$w_1 w_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2$ $= w_1 w_2 \sigma_{12}$
$w_2$	$w_1 w_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2$ $= w_1 w_2 \sigma_{12}$	$w_2^2 \sigma_2^2$

- $\sigma_{12}$  = covarianza de los retornos
- $\rho$  = correlación de los retornos

## Ejemplo:

### ■ Varianza del portafolio =

$0.6^2 * 28^2 = 282$	$0.6 * 0.4 * 0.4 * 28 * 42 = 113$
$0.6 * 0.4 * 0.4 * 28 * 42 = 113$	$0.4^2 * 42^2 = 282$

- Varianza =  $282 + 282 + (2 * 113) = 790$
- Desviación estándar =  $(790)^{1/2} = 28.1\% = \text{Volatilidad}$
- Nota: Estamos suponiendo una correlación igual a 0.4



## Ejemplo 2

- Activos: Endesa, Copec
- Retornos esperados (Anualizados)
- Retorno Esperado Cartera ?

Endesa:	12%
Copec:	15%

$$E(r_C) = w_1 * 12\% + w_2 * 15\%$$

Puesto que la proporción de inversión en cada activo suma 1:

$$E(r_C) = w_1 * 12\% + (1 - w_1) * 15\%$$

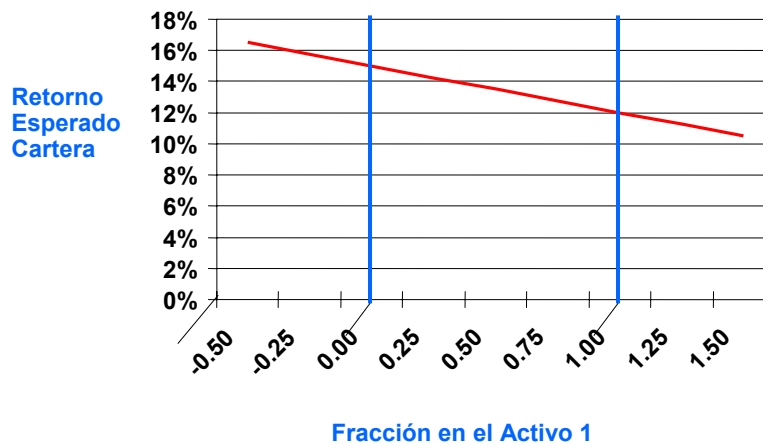
Retorno Esperado Cartera puede ser menor a 12% o mayor que 15%?



IN56A

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile  
Primavera 2005

## Retorno Esperado de la Cartera



IN56A

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile  
Primavera 2005

## Volatilidad de una cartera

- Habíamos visto que para una cartera, la volatilidad es

$$\sigma_C = \sqrt{w^2 \cdot \sigma_1^2 + (1-w)^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot w \cdot (1-w) \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho}$$

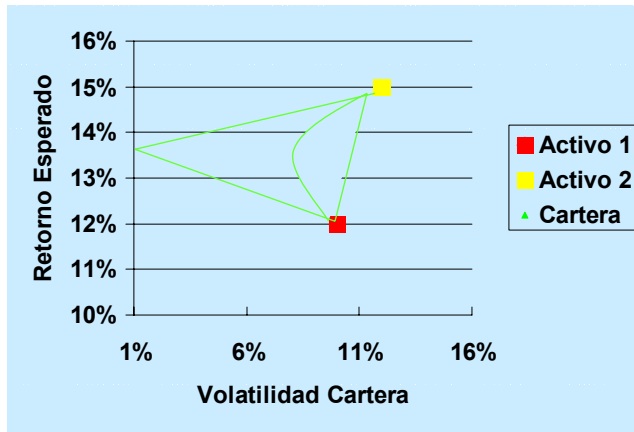
- Si volatilidad del activo 1 es 10% y del activo 2 es 12%, y su correlación es -0.5 entonces

Fracción w	Vol Cartera
0.0	12.0%
0.5	5.6%
1.0	10.0%

## Calculando Retorno y Riesgo de la Cartera

Peso Act 1 w	Retorno Esperado	Volatilidad de la Cartera para diferentes correlaciones:				
		-0.5	0	0.5	1	-1
0%	15.00%	12.00%	12.00%	12.00%	12.00%	12.00%
10%	14.70%	10.34%	10.85%	11.33%	11.80%	9.80%
20%	14.40%	8.77%	9.81%	10.74%	11.60%	7.60%
30%	14.10%	7.37%	8.92%	10.24%	11.40%	5.40%
40%	13.80%	6.25%	8.24%	9.83%	11.20%	3.20%
50%	13.50%	5.57%	7.81%	9.54%	11.00%	1.00%
60%	13.20%	5.50%	7.68%	9.37%	10.80%	1.20%
70%	12.90%	6.06%	7.87%	9.34%	10.60%	3.40%
80%	12.60%	7.11%	8.35%	9.43%	10.40%	5.60%
90%	12.30%	8.46%	9.08%	9.66%	10.20%	7.80%
100%	12.00%	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%

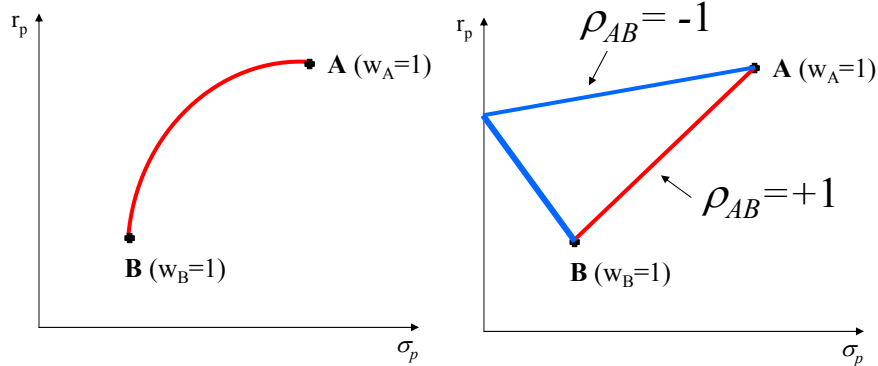
## Graficando Retorno y Riesgo para una cartera



IN56A

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile  
Primavera 2005

## Carteras posibles con 2 activos



■ Instrumentos con correlación positiva moderada

• Correlación perfecta (positiva y negativa)

IN56A

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile  
Primavera 2005

## Diversificación de riesgos

- Una adecuada selección del peso en cada uno de los activos permite una disminución del riesgo de la cartera.
- Un menor riesgo implica siempre una mayor rentabilidad?
- Es posible encontrar una cartera con riesgo cero?
- Qué pasa para más de dos activos?



IN56A

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile  
Primavera 2005

## Varianza de un portafolio de N instrumentos

- Varianza del Portafolio:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij}$$

- Supongamos que el peso de cada instrumento es igual a  $1/N$
- En la varianza del portafolio, existen N varianzas ponderadas por  $1/N$  y  $N^2-N$  covarianzas. Podemos decir entonces que la varianza del portafolio es:

$$\text{Varianza} = N \left( \frac{1}{N} \right)^2 (\text{varianza promedio}) + (N^2 - N) \left( \frac{1}{N} \right)^2 (\text{covarianza promedio})$$

$$\text{Varianza} = \frac{1}{N} (\text{varianza promedio}) + \left( 1 - \frac{1}{N} \right) (\text{covarianza promedio})$$

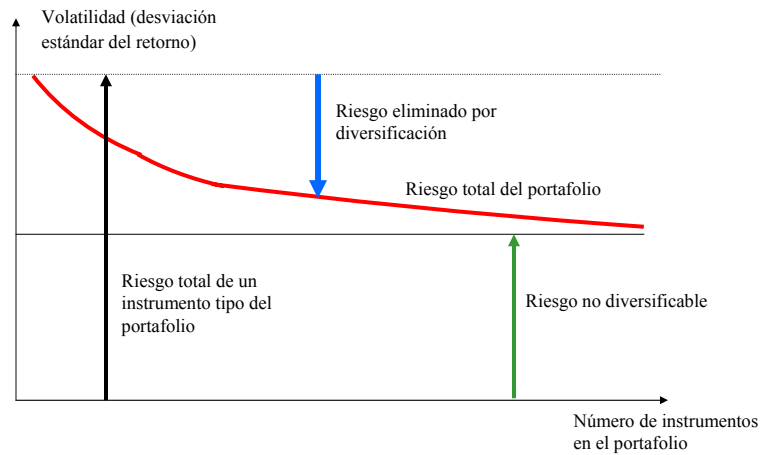
- Si N es muy grande, la varianza del portafolio tiende a la covarianza promedio de los instrumentos.



IN56A

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile  
Primavera 2005

## La varianza del portafolio descenderá hasta un nivel donde no será posible reducir más su varianza.



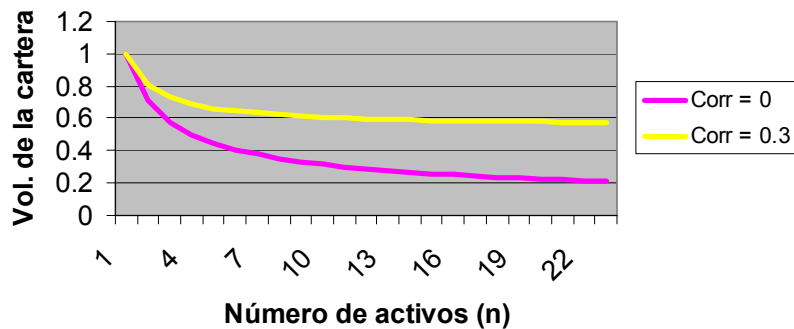
IN56A

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile  
Primavera 2005

## Diversificación depende de la correlación

### Diversificación para n activos

(Varianzas iguales a 1.0, misma correlación entre activos)



IN56A

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile  
Primavera 2005

## Frontera de mínima varianza de Carteras

$$\begin{aligned} \underset{\mathbf{w}}{\text{Min}} \quad & \frac{1}{2} \sigma_c = \frac{1}{2} \sqrt{\mathbf{w}^T \cdot \Sigma \cdot \mathbf{w}} \\ \text{s.a.} \quad & \mathbf{w}^T \cdot \vec{\mathbf{1}} = 1 \\ \text{s.a.} \quad & \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{R}_e = r \end{aligned}$$



IN56A

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile  
Primavera 2005

## Condiciones necesarias y suficientes para carteras en la frontera de mínima varianza

$$\sum_{j=1}^n \sigma_{ij} \cdot w_j - \lambda \cdot \bar{r}_i - \mu = 0 \quad \text{para } i = 1 \dots N$$

$$\sum_{i=1}^n w_i \cdot \bar{r}_i = r$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$



IN56A

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile  
Primavera 2005

## Teorema de dos fondos

Matricialmente,  
la solución para  $w$   
se despeja de

$$\Sigma \cdot w - \lambda R_e - \mu \vec{1} = 0$$

$$w^T \cdot R_e = r$$

$$w^T \cdot \vec{1} = 1$$

Si  $w1$ , y  $w2$  son dos soluciones conocidas del problema  
para  $r$  distintos, entonces

$$w3 = \alpha w1 + (1 - \alpha) w2$$

es también una solución para  $r3 = \alpha r1 + (1 - \alpha) r2$ .

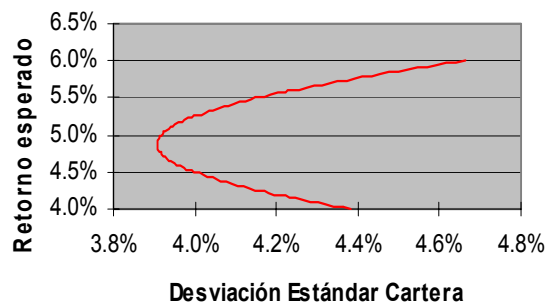
IN56A

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile  
Primavera 2005

## Carteras de mínima varianza definen una parábola en el espacio $r-\sigma^2$

### Frontera Mínima Varianza

Caso  $r1=4\%$ ,  $r2=6\%$   $\sigma1=3.0\%$ ,  $\sigma2=3.4\%$ ,  $\rho=50\%$

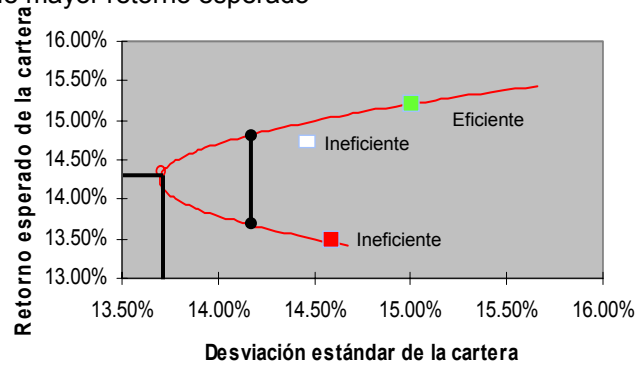


IN56A

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile  
Primavera 2005

## Concepto de frontera eficiente de carteras

Agentes prefieren al mismo nivel de volatilidad carteras de mayor retorno esperado



IN56A

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile  
Primavera 2005

## Un caso particular...

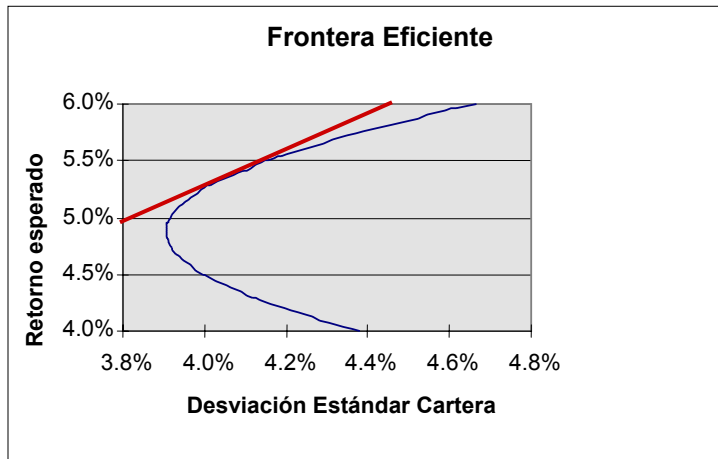
- Supongamos que la matriz de varianza covarianza es la identidad
- Cuál es la solución al problema de mínima varianza?
- Qué ocurre si  $N$  tiende a infinito?
- Cómo podemos usar este resultado para resolver el caso más general?

IN56A

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile  
Primavera 2005



## Introduciendo Activos sin riesgo



## Activo libre de riesgo

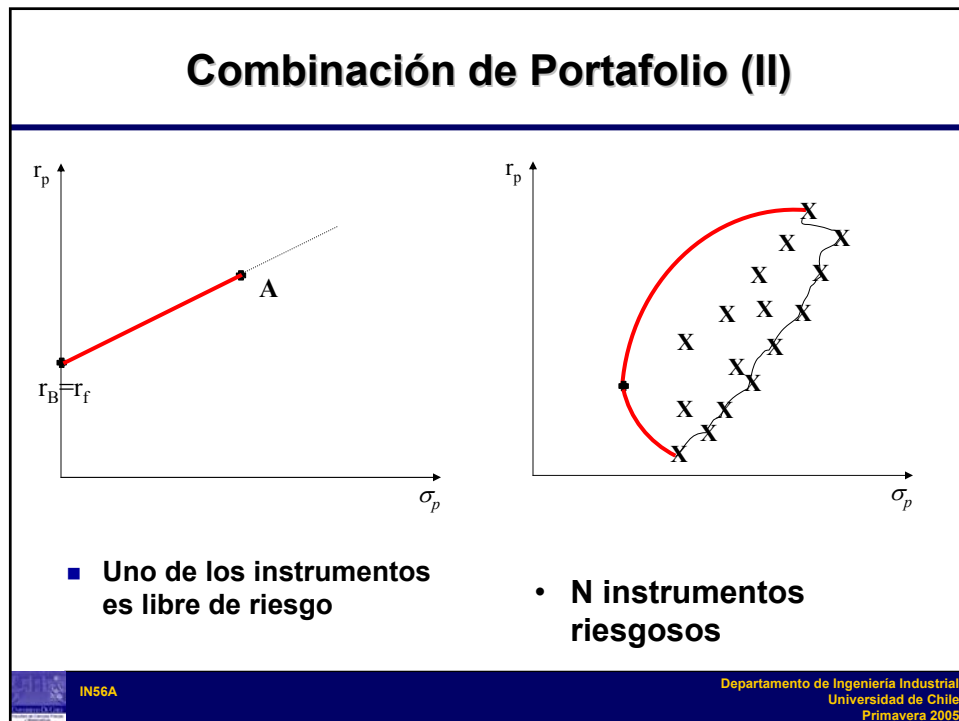
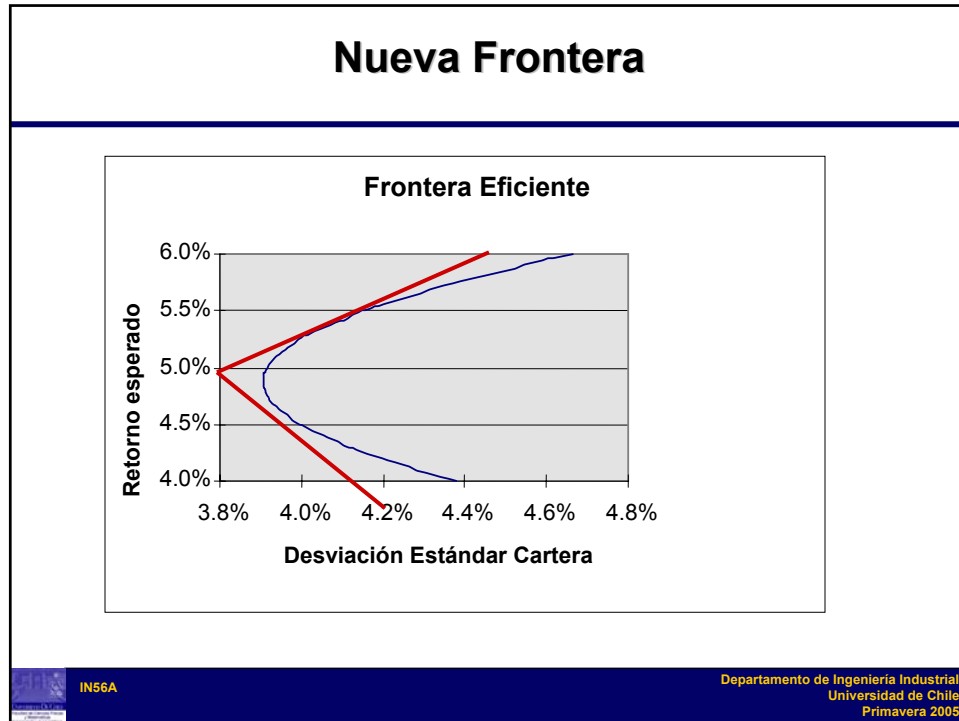
Nuevo valor esperado de la cartera:

$$\bar{r}_E = w \cdot r_F + (1-w) \cdot r$$

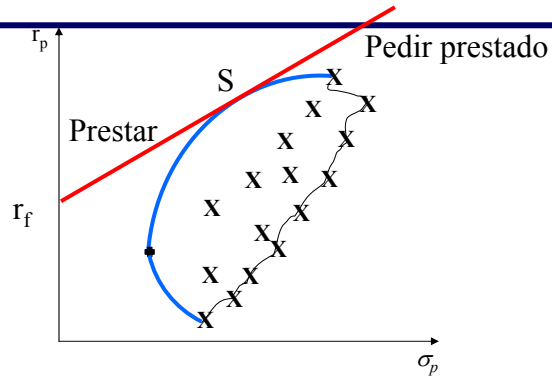
Y el riesgo es....:

$$\sigma_C = (1-w) \cdot \sigma$$

El efecto de la incorporación de un activo libre de riesgo  
es una ampliación de la región de carteras posibles de  
construir



## Combinación de Portafolio (III)

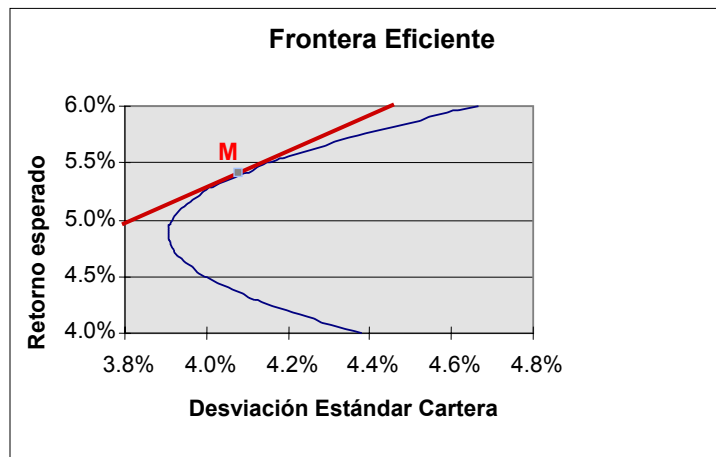


- S es el mejor portafolio de instrumentos riesgosos.
- El set de portafolio eficientes puede ser calculado a través de programación cuadrática que minimice la desviación estándar del portafolio sujeto a que el retorno sea al menos igual a Z.
- El portafolio óptimo está en la frontera pero también tiene el mayor ratio de retornos esperados por sobre la tasa libre de riesgo por unidad de desviación estándar.

IN56A

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile  
Primavera 2005

## La cartera de Mercado

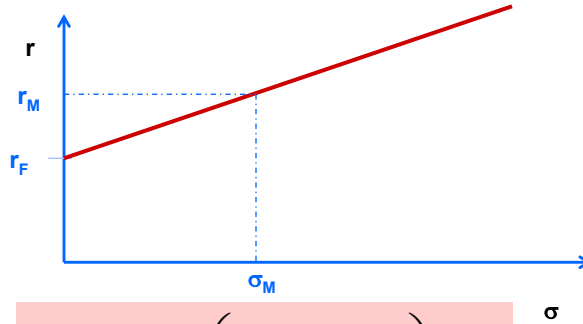


Todo punto eficiente puede representarse como una combinación lineal entre el activo libre de riesgos y la cartera M.

IN56A

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile  
Primavera 2005

## Línea de mercado de capitales



El retorno de cualquier cartera en la frontera se expresa como una relación lineal de la volatilidad de dicha cartera

$$r = r_F + \left( \frac{r_M - r_F}{\sigma_M} \right) \cdot \sigma$$



IN56A

Departamento de Ingeniería Industrial  
Universidad de Chile  
Primavera 2005