

IN 56B INGENIERIA DE FINANZAS

Semestre Otoño 2006

4 de julio de 2006

2,5 horas

EXAMEN

Problema 1 (40%)

Sea el siguiente proceso para el precio de un mineral que se transa en una bolsa de metales:

$$dP = \mu_P \cdot P \cdot dt + \sigma_P \cdot P \cdot dz$$

con $E(dz)=0$, y $V(dz)=dt$, y μ_P σ_P constantes.

Ud. dispone de un estudio que plantea que el retorno (porcentual) histórico de los últimos 18 meses ha mostrado un incremento de 4,08% mensual. Además la volatilidad del precio ha sido 18% anual. El mercado a futuro muestra los siguientes precios:

Precio USD/lb	Contrato
3.00	Spot
3.01	1 mes
3.04	3 meses
3.09	6 meses

El estudio determina que el rendimiento de conveniencia, c , (es decir la rentabilidad que genera disponer del metal más allá de el efecto de incremento de precios) es cercana a cero.

Ud. dispone de 10 millones de libras en stock intermedio, y planea venderlos 50% en 3 meses más y el resto en 6 meses más. Además, Ud. conoce la estructura de tasas de bonos de gobierno (anuales, compuestas anualmente, base 30/360) la que se presenta a continuación.

	Tasas Gob \$	Tasas Gob USD
mes 1	6.00%	5.50%
mes 2	6.12%	5.59%
mes 3	6.18%	5.68%
mes 4	6.25%	5.77%
mes 5	6.35%	5.86%
mes 6	6.45%	5.95%
mes 7	6.49%	6.04%
mes 8	6.51%	6.13%
mes 9	6.55%	6.22%
mes 10	6.58%	6.31%
mes 11	6.61%	6.40%
mes 12	6.65%	6.49%

El tipo de cambio Peso-USD es de 540, la volatilidad diaria es de 0,5% y la correlación de los retornos entre el dólar y el precio del metal se estima en -0,07.

a) Estime al 95% el peor precio en dólares al que podría vender su stock en 6 meses más.

Solución: el proceso en $\ln(P)$ es normal y tiene media $(\mu_P - \sigma_P^2/2)dt$ y varianza $\sigma_P^2 dt$
 Luego el peor retorno logarítmico en T al 95% será $(\mu_P - \sigma_P^2/2)T - 1,64 \sigma_P \text{raiz}(T)$.

peor precio será $P \exp((\mu_P - \sigma_P^2/2)T - 1,64 \sigma_P \text{raiz}(T))$.

Con

$P=3$

$T=6$

y $\sigma_P=0,18/\text{raiz}(12)=5,196\%$

Notar que μ_P debe ser estimada de alguna manera: la “mejor” manera es suponer que el mercado tiene toda la información. En ese caso $\mu_P = \ln(3,08/3,00)/6 = 0,464\%$.

Una alternativa menos correcta pero debe ser justificada es suponer que la tendencia histórica se va a mantener. En ese caso hay que pasar de retorno porcentual a retorno log: $(1+4,08\%) = \exp(\mu_P)$, luego $\mu_P = 4,00\%$

Por lo que reemplazando se obtiene el peor precio

Nota : no debe ser muy caro equivocarse en restar el término $-\sigma_P^2/2$. Más importante es justificar el retorno medio utilizado.

b) Suponga que le ofrecen un contrato de opción para vender metal en 3 meses más a un precio de USD3.0/lb. ¿Qué monto total la parecería razonable pagar hoy por disponer del derecho a vender toda la producción en 3 meses más?

Podemos construir árbol

Tenemos ya la vol mensual, falta la tasa mensual. Tasa en USD a 3 meses: Como es compuesta anual, tenemos que $(1+5,68\%)^{(1/12)} = (1+r)$ $R= 1,004614$

Armando el árbol binomial podemos llegar a

$u = \exp(5,196\%) =$ $d = \exp(-5,196\%) =$

Arbol Precio	1	2	3
			3.5061
		3.3285	
	3.1600		3.1600
3.0000		3.0000	
	2.8481		2.8481
		2.7039	
			2.5670

Luego podemos calcular precio de la Put y descontar hacia delante

Arbol Put	1	2	3
			0.0000
		0.0000	
	0.0331		0.0000
0.0964		0.0709	
	0.1692		0.1519
		0.2823	
			0.4330

Luego el monto total a pagar será $0,0964 \times 5.000.000 = 481.976$ dólares.

c) Determine el VaR al 95% del valor del stock de mineral en 1 mes más, si su hábitat de moneda es el peso.

En un mes más el peor precio de cobre se dará con un cambio logarítmico negativo (es decir una caída) de $1,64 \times \sigma_P \times \text{raiz}(1) = 1,64 \times 5,196\% = 8,52\%$.

Por otro lado el peor cambio en el tipo de cambio es por un salto (una caída del tipo de cambio) de un retorno logarítmico de $1,64 \times \sigma_{TC} \times \text{raiz}(30) = 1,64 \times 0,5 \times \text{raiz}(30) = 4,49\%$.

El valor esperado del inventario en un mes más se puede estimar usando el precio futuro del mineral, y el tipo de cambio forward a 1 mes, F.

$$\text{Así } F = 540 \times [(1+6\%)^{(1/12)}] / [(1+5,5\%)^{(1/12)}] = 540,21$$

Luego valor del inventario es de

$$\text{Así } V = 10 \times 540,21 \times 3,01 = 16.260,41 \text{ millones de \$}$$

Luego, el VaR de precios es $\text{VaR1} = V \times (1 - \exp(-8,52\%)) = -1.328,26$ millones de \$.

el VaR de tipo de cambio es $\text{VaR2} = V \times (1 - \exp(-4,49\%)) = -714,15$ millones de \$

El VaR total es entonces $\text{VaRT}^2 = \text{VaR1}^2 + \text{VaR2}^2 + 2 \times \rho \times \text{VaR1} \times \text{VaR2}$

es decir $\text{VaRT} = 1.463,38$ millones de \$

Este valor puede ser descontado a su vez para ser traído a valor presente.

Nota si no usan valores esperados y usan el valor de hoy del inventario en ese caso no es necesario descontar. (el resultado debiera ser muy similar)

Si aplican los cambios porcentuales directamente sobre el valor del inventario en vez de cambios logarítmicos, no está malo tampoco.

d) Si V es el valor en pesos del stock de mineral de la empresa determine el proceso estocástico que sigue V y sus parámetros (Hint: considere primero el proceso que sigue el tipo de cambio).

$$dS = S\mu_S dt + S\sigma_S dz_S$$

$$dP = P\mu_P + P\sigma_P dz_P$$

$$V = S \times P,$$

$$\text{luego } dV = SdP + P \times dS$$

es decir

$$dV/V = dP/P + dS/S$$

$E(dV/V) = (\mu_S + \mu_P)dt$
y además

$$V(dV/V) = (\sigma_S^2 + \sigma_P^2 + 2\sigma_S\sigma_P\rho)dt$$

Si denominamos a $\sigma_V = \text{raiz}[(\sigma_S^2 + \sigma_P^2 + 2\sigma_S\sigma_P\rho)]$
entonces

$dV = V(\mu_S + \mu_P)dt + V\sigma_V dz_V$
es un proceso browniano geométrico

e) Cómo puede verificar con los datos presentados que efectivamente el rendimiento por conveniencia (c) es cercano a cero. Cómo estimaría el rendimiento por conveniencia (c) si el precio del futuro del mineral a 6 meses fuera 3.02. (Hint use técnica de valorización neutra al riesgo).

Solución: en un proceso neutro al riesgo el drift de P debiera ser $(r-c)dt$. Luego si F es el precio futuro, y r y c están expresados en composición anual, debiera ser cierto que en un mundo neutro al riesgo el valor esperado de P en T sea igual al precio futuro. Luego como P crece a la tasa libre de riesgo menos c, entonces debe ser cierto que $F = P \cdot (1+r-c)^{(6/12)}$. Luego si $F=3,02$, r a 6 meses es 5,95% y $P=3,00$, podemos deducir que $c=4,61\%$ y a la vez chequear que para el caso original el valor de c es cercano a 0.

Problema 2 (30%)

Suponga que Ud. dispone de estadísticas de precios de las 10 acciones más líquidas del mercado local, y ha estimado, usando información diaria para los últimos 100 días, las volatilidades anuales, la matriz de covarianzas, las correlaciones históricas, y además ha obtenido estimaciones de los betas de dichas acciones. Dispone además de estimaciones para la prima por riesgo del mercado local, la cual se estima en 12% anual nominal, y la tasa libre de riesgo se calcula en 6% anual nominal. Se estima asimismo que la volatilidad anual de la cartera de mercado es de 40%. Ud. está considerando participar en la cartera A colocando un 10% del total a invertir en cada una de las 10 acciones.

a) Estime el retorno mínimo al 95% en un año más para la cartera A. Puede expresar el resultado en función del beta promedio de dichas acciones y la covarianza promedio entre ellas.

Ret Mínimo = Ret esperado - 1,64σ

donde Ret esperado = $0,1 \cdot \text{suma}(R_f + \beta_i \cdot (R_m - R_f)) = 0,1 \cdot [10 \cdot 6\% + 12\% \cdot \text{suma}(\beta_i)] = 6\% + 12\% \cdot \beta_{\text{prom}}$

Si Cov Prom = $\text{Suma}_i (\text{Suma}_j (\text{Cov}_{ij})) / n^2$
entonces

$$\sigma^2 = 0,1^2 \cdot \text{Suma}_i (\text{Suma}_j (\text{Cov}_{ij}))$$

por lo que

$$\text{Ret Mínimo} = 6\% + 12\% \cdot \beta_{\text{prom}} - 1,64 \cdot \text{raiz}(\text{Cov Prom})$$

b) Explique la diferencia entre VaR y riesgo sistemático, y calcule la diferencia entre VaR marginal de una acción de la cartera A (es decir cómo cambia el VaR total cuando cambia el monto invertido en una acción) y el Beta de la acción, aun en el caso extremo en que A se parezca mucho a M, (M siendo la cartera de mercado).

VaR es riesgo total. El riesgo sistemático es sólo la componente del riesgo total que apunta en la dirección del mercado. El VaR agrega además el riesgo específico.

$VaRT^2 = 1,64^2 * w^T \Sigma w$ Al derivar a ambos lados c/r al ponderador w_i queda $2 * VaRT * d(VaRT) = 1,64^2 * 2 (\Sigma w)_i dw_i$.

Notar que podemos interpretar $(\Sigma w)_i$ como la covarianza entre el activo i y el retorno de la cartera A , que coincide con la covarianza promedio del activo i con todos los demás activos de la cartera

Es decir, $VaRMarginal_i = [1,64^2 * Cov(R_A, R_i)] / VaRT = 1,64 * Cov(R_A, R_i) / \sigma_A$
en cambio $\beta_i = Cov(R_M, R_i) / \sigma_M^2$

Los betas tienen entonces unidades de cov dividido por varianza, en cambio VaR marginal tiene unidades de cov dividido por desviación estándar. Aún cuando A sea muy parecido a M los betas y el VaR Marginal tienen unidades diferentes.

c) Suponga que Ud. construye una frontera de mínima varianza usando las 10 acciones más líquidas del mercado (suponga que se permiten ventas cortas). ¿Cómo comprobaría que la cartera de mercado, M , no está en dicha frontera: (Qué condición matemática espera Ud. que se cumpla con la cartera M)?

Varias maneras de resolver:

La cartera de mercado tiene $R_M = 18\%$ y $\sigma_M = 40\%$. La frontera eficiente tiene la ecuación $R = R_f + [(R_M - R_f) / \sigma_M] * \sigma \rightarrow R = 6\% + 0,3 * \sigma$

luego, la frontera de mínima varianza se determina mediante la solución del sistema

Min $w^T \Sigma w$
sa $w^T * 1 = 1$
sa $w^T * R_e = 18\%$ que es el retorno del mercado

tiene que verificarse que $40\% < \text{raiz}(w_{opt}^T \Sigma w_{opt})$

otra forma. Como w_{opt} tiene un retorno esperado de 18% por construcción, entonces tiene el mismo beta que el mercado, lo que indica que $Cov(R_{w_{opt}}, R_M) = \sigma_M^2$

Es decir necesariamente $R_{w_{opt}}$ se escribe como $R_{w_{opt}} = R_M + \varepsilon$ con ε independiente de R_M . por lo que la varianza de $R_{w_{opt}}$ es mayor que la varianza de R_M .

Problema 3 (30%)

Suponga que Ud. tiene una cartera de créditos con dos tipos de consumidores, los que clasifica en dos grupos. En el grupo 1 hay N_1 individuos con monto promedio individual de deuda igual a M_1 . En el grupo 2, N_2 y M_2 respectivamente.

Se sabe que la correlación promedio de incumplimiento al interior de cada grupo es de $0,5$, sin embargo la correlación de incumplimiento entre individuos de distinto grupo es de $0,05$. Las probabilidades de incumplimiento en un año para individuos del grupo 1 es de $0,5\%$ para los individuos del grupo 2 es $0,1\%$.

a) Estime las pérdidas esperadas en un 1 año (suponga $LGD = 100\%$, $M_1 = 1$ millón, $M_2 = 2$ millones, $N_1 = 50$ mil, $N_2 = 20$ mil)

$PE_i = M_i * N_i * p_i$

b) Estime la desviación estándar del grupo 1 y 2

sabemos que para el grupo 1 $\sigma_i = M1 * \text{raiz}(p1 * (1-p1))$

$$V(G1) = \sum_i (\sum_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}) = N1^2 * M1^2 * p1 * (1-p1) * 0,5$$

$$\text{luego } \sigma1 = M1 * N1 * \text{raiz}(p1 * (1-p1) * 0,5)$$

idem para 2

c) Estime el valor de 2,33 veces la desviación estándar de la cartera total

$$\text{Cartera total: } VC = V(G1) + V(G2) + 2 * \text{Raiz}(V(G1)) * \text{Raiz}(V(G2)) * 0.05$$

luego se puede calcular 2,33 raiz de lo anterior

d) Discuta cómo podría estimar el VaR de crédito a un año al 99% de la cartera

Una forma de hacerlo es lo anterior, sin embargo esto supone distribución normal, que no es necesariamente el caso. Una segunda posibilidad es simular los eventos de incumplimiento, acorde al tamaño de la cartera y los parámetros de correlación, y desde allí obtener la distribución de las pérdidas totales. Con ello podemos obtener el percentil al 99% de pérdidas.

e) Refiérase a las interpretaciones económicas de la PE y del VaR de Crédito de la cartera.

La PE está asociada a la tarifa a cobrar para cada individuo ya que permite estimar en promedio cuánto va a perder en un año la cartera. Es el costo promedio anual que incurre el negocio dada la calidad crediticia de su cartera. El VaR de Crédito es el capital económico que debe inmovilizarse para asegurar que las pérdidas máximas que ocurren 1 en 100 años, puedan ser atendidas. Si se cobra debe cobrarse por el costo de oportunidad de no usar ese capital en negocios alternativos.