



28 de agosto de 2006
60 minutos
Sin Apuntes

Pauta Ctp nº1

Pregunta 1)

a) Un proceso generalizado de Wiener puede escribirse como:

$$dx = a \cdot dt + b \cdot dz \quad (1)$$

donde a y b son constantes, x es una variable aleatoria continua (por ejemplo la tasa de interés), y

$$dz = \varepsilon(t) \cdot \sqrt{dt}$$

y donde $\varepsilon(t)$, para todo t , es una Normal Estándar (no correlacionada para todo t y t' distintos) .

La integral de la ecuación (1) (entre t y $t_0=0$) es

$$x(t) = x(0) + a \cdot t + b \cdot z(t) \quad (2)$$

Encuentre la distribución de probabilidad de $z(t)$ y de $x(t)$ en t .

Dado que ε se distribuye según una distribución normal, dz y dx también. Luego, tanto x como z se distribuyen normal.

Para obtener los parámetros de la distribución, hay que calcular la esperanza y la varianza de x y z . Es directo que:

$$z(t) \sim N(0, t)$$
$$x(t) \sim N(x_0 + at, b^2 t)$$

b) Si el precio de una acción sigue un proceso Browniano geométrico de la forma,

$$dP = P \cdot \mu \cdot dt + P \cdot \sigma \cdot dz \quad (3)$$

encuentre la expresión integral de la ecuación (3) y refiérase a su distribución de probabilidad.

Sea $f = \ln(P)$,

$\frac{\partial f}{\partial t} = 0$; $\frac{\partial f}{\partial P} = \frac{1}{P}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial P^2} = -\frac{1}{P^2}$, luego, aplicando Ito:

$$d \ln(P) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz$$

Discretizando:

$$\Delta \ln(P) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \Delta z$$

La forma integral de P_t será

$$P_t = P_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz \right\}$$

Como $\ln(P) \sim N \left(\ln(P_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t, \sigma^2 t \right)$ (entre 0 y t), sabemos que P_t se distribuirá log-normal. En

auxiliar, vimos que si una variable V se distribuye normal con media m y varianza s^2 , luego, si $V = \ln(Q)$, Q era log-normal donde, $E(Q) = \exp(m + s^2/2)$ y $\text{Var}(Q) = \exp(2m + s^2)(\exp(s^2) - 1)$. Así,

$$E(P) = P_0 \exp(\mu t)$$

$$\text{Var}(P) = \exp(2\mu t) (\exp(\sigma^2 t) - 1)$$

c) Si x en (1) representa la difusión de la tasa de interés interbancaria, y P en (3) representa la difusión del precio del petróleo, explique claramente cómo estimaría los parámetros de cada ecuación en función de información histórica u otra.

Volatilidad : en función de data histórica en la medida que el proceso típicamente es estacionario (condicional en t) en volatilidad. Luego basta estimar la desviación histórica de las variaciones log.

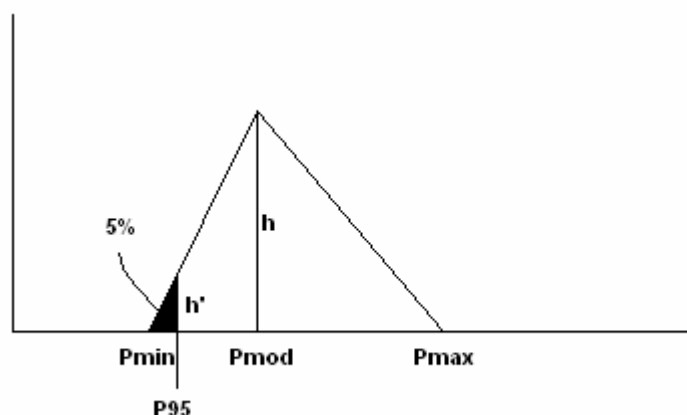
El caso de μ : La historia no nos permite obtener estimaciones adecuadas: por un lado hay argumentos de eficiencia de mercado, y por otro lado hay argumentos estadísticos (que no permiten rechazar la hipótesis nula, a menos de usar un horizonte de tiempo muy grande). La alternativa es pensar en estimaciones de P esperado en función de expectativas, o bien de precios futuros, y de allí deducir μ .

Pregunta 2)

Suponga que Ud. quiere estimar la volatilidad de la partida de ingreso fiscal asociada a los ingresos del cobre. Suponga que la estimación de ingresos es de I para el año 2007, en base a un precio promedio P .

a) Si Ud. accede a un estudio de Cochilco que entrega un rango de precio mínimo P_{min} , y Precio Máximo P_{max} , además de un precio más probable P_{mod} , y supone que la distribución de probabilidad del precio promedio es triangular (P sigue siendo la media del precio promedio), cuál sería el peor precio promedio al 95% que recomendaría usar para evaluar el riesgo del ingreso fiscal?

Se tiene una distribución del tipo triangular:



El área bajo el triángulo es igual a 1, luego,

$$1 = \frac{(P_{max} - P_{min})h}{2} \Rightarrow h = \frac{2}{(P_{max} - P_{min})}$$

Por otro lado,

$$\frac{h}{P_{\text{mod}} - P_{\text{min}}} = \frac{h'}{P_{95} - P_{\text{min}}}, \text{ reemplazando h,}$$

$$h' = \left(\frac{P_{95} - P_{\text{min}}}{P_{\text{mod}} - P_{\text{min}}} \right) * \left(\frac{2}{P_{\text{max}} - P_{\text{min}}} \right)$$

El área del triángulo negro debe es igual a 0,05. De esta forma:

$$\begin{aligned} 0,05 &= (P_{95} - P_{\text{min}}) * \frac{h'}{2} \\ 0,05 &= (P_{95} - P_{\text{min}})^2 * \left(\frac{1}{P_{\text{mod}} - P_{\text{min}}} \right) * \left(\frac{1}{P_{\text{max}} - P_{\text{min}}} \right) \\ (P_{95} - P_{\text{min}})^2 &= 0,05 * (P_{\text{mod}} - P_{\text{min}}) * (P_{\text{max}} - P_{\text{min}}) \end{aligned}$$

De donde se puede despejar P_{95} .

b) Cómo cambia su respuesta si el precio esperado del precio promedio es P, pero la distribución del logaritmo del precio en ese intervalo de tiempo es normal y tiene una volatilidad de σ para el 2007.

Suponiendo $dt = 1$ año,

$$\ln(\tilde{P}) \sim N(\ln(P_0) + \mu, \sigma^2)$$

$$\ln(\tilde{P}) \sim N\left(\ln(P) - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2\right)$$

Sabemos que para una distribución normal, el multiplicador de la desviación estándar para obtener un precio mínimo al 95% es -1,64, entonces:

$$\ln(P_{95}) = \left(\ln(P) - \frac{\sigma^2}{2} \right) - 1,64 * \sigma \Rightarrow P_{95} = P \exp\left\{ \left(-\frac{\sigma^2}{2} \right) - 1,64 * \sigma \right\}$$

c) Si el presupuesto fiscal tiene 2 grandes incertidumbres para 2007: el precio promedio del cobre y el precio promedio del petróleo. Explique (no calcule nada) cómo estimaría el riesgo de menor presupuesto fiscal al 95% por causa de estas dos variables en forma simultánea.

Para calcular el riesgo que significan ambas variables en conjunto, habría que desarrollar un procedimiento similar al de las partes a) y b), pero teniendo en cuenta la correlación existente entre los 2 factores de riesgo.

Dudas y/o comentarios: gematurana@gmail.com