



GUÍA DE EJERCICIOS # 2 (procesos de precios)

Problema 1

a) Si $\{X(t), t \geq 0\}$ es un movimiento Browniano, entonces el proceso $\{Y(t), t \geq 0\}$ definido por

$$Y(t) = e^{X(t)}$$

movimiento Browniano geométrico. Si $X(t)$ se distribuye Normal de media 0 y varianza t , calcule:

- $E[Y(t)]$
- $V[Y(t)]$

b) Suponga tiene la opción de comprar en el tiempo T futuro, una unidad de una acción a un precio fijo K . Suponga que el valor presente de la acción es y . Además, el precio varía según un proceso Browniano geométrico.

- Calcule El valor esperado de la opción

Problema 2

Sea un contrato futuro en una acción que no paga dividendos. Asuma que la tasa de interés libre de riesgo es constante e igual a r para todas las maduraciones. Es decir:

$$F_0 = S_0 e^{rT}$$

Donde F_0 es el precio futuro de la acción en t igual a cero y S_0 es el precio spot en el tiempo cero y T es el tiempo de maduración del contrato.

a) Se le pide determinar el proceso que sigue F a través del tiempo, donde F :

$$F = S e^{r(T-t)}, \text{ dado que } S \text{ sigue el siguiente proceso: } dS = \mu S dt + \sigma S dz,$$

Donde dz es un movimiento Browniano de media 0 y varianza t .

b) Repita el calculo anterior para

$$F = \ln(S)$$

A partir de la parte b)

- c) Determine la media y la desviación estándar de $\ln(S_T)$
- d) Determine la media y la desviación estándar de S_T .

Problema 3

El valor de una cartera de inversiones en dos tipos diferentes de acciones en un momento dado del tiempo se puede escribir como

$$V = P_1 \cdot Q_1 + P_2 \cdot Q_2$$

Suponga que los precios de las acciones 1 y 2 siguen un proceso browniano geométrico, con

$$dP_1 = \mu_1 P_1 dt + \sigma_1 P_1 dZ_1$$

$$dP_2 = \mu_2 P_2 dt + \sigma_2 P_2 dZ_2$$

Además

$$dZ_1 = \varepsilon_1 \sqrt{dt} \quad \varepsilon_1 \rightarrow N(0,1)$$

$$dZ_2 = \varepsilon_2 \sqrt{dt} \quad \varepsilon_2 \rightarrow N(0,1)$$

$$\text{y } E(\varepsilon_1 \varepsilon_2) = \rho$$

- a) Determine una expresión para el proceso que sigue dV . ¿Qué tipo de proceso es?
- b) Si $\mu_1 = 3\%$ mensual, $\mu_2 = 5\%$ mensual, $\sigma_1 = 8\%$ mensual, $\sigma_2 = 10\%$, y $\rho = 0,5$. Además en $t=0$, $P_1 = 10$, $P_2 = 5$, $Q_1 = 5$, $Q_2 = 20$. Se pide que estime x tal que

$$\Pr \left[\frac{V(t=1) - V(0)}{V(0)} \leq x \right] = 0.9772$$

(Nota: use el hecho que si z es normal con media μ y varianza σ^2 entonces

$$\Pr[z \leq x] = 0.9772 \Leftrightarrow x = \mu - 2\sigma$$

Problema 4

Considere una variable S , la cual sigue el siguiente proceso de Wiener discreto:

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \Delta Z$$

Suponga que $\mu = 2\%$ mensual y $\sigma = 10\%$ mensual, y que $S_0 = 100$.

- a) ¿Cuál es la distribución del incremento de S en 5 meses más?
- b) ¿Cuál es el valor esperado de S en 5 meses más?
- c) Si $\varepsilon_1 = 0,702$; $\varepsilon_2 = -1,335$; $\varepsilon_3 = 1,442$; $\varepsilon_4 = 0,02$; $\varepsilon_5 = 0,691$; corresponden a realizaciones de un proceso normal $[0,1]$ (ruido blanco). Genere una trayectoria asociada al proceso de Wiener para el precio S desde el mes 1 hasta el mes 5, considerando las realizaciones del proceso normal.

Nota: si x es normal con media μ y varianza σ^2 entonces $\exp(x)$ tiene media $\exp(\mu + \sigma^2/2)$

Problema 5

Suponga que el tipo de cambio $S(t)$ (expresado en pesos por dólar) sigue un proceso de la forma,

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma_s dz$$

donde dz es un proceso de Wiener. Suponga además que el precio del petróleo (en dólares por barril), $P(t)$ sigue un proceso de la forma,

$$\frac{dP}{P} = \alpha dt + \sigma_p dw$$

donde dw es también un proceso de Wiener independiente del anterior.

- a) Determine el proceso que sigue el nivel del precio del petróleo en pesos definido como $V(t) = P(t)S(t)$.
- b) Encuentre el valor esperado del precio del petróleo en pesos $V(T)$, dado que el precio en $V(0) = V_0$.
- c) Suponga que Ud. estima que la volatilidad diaria del tipo de cambio, σ_s , se estima en 0,5%. Si el tipo de cambio hoy es de 535, y el mercado espera que el tipo de cambio llegue a 550 en 360 días más. Se pide que estime μ .
- d) Suponga ahora que el proceso dw y dz están correlacionados positivamente. Por ejemplo suponga que $E(dz dw) = 0.5dt$. ¿Qué efecto tiene este supuesto sobre la volatilidad de $V(t)$? ¿Cómo cambia el valor esperado del precio del petróleo en pesos en T , $V(T)$, calculado en b)?
- e) Si de Ud. dependiera el diseño de un fondo de estabilización del precio del petróleo para el corto plazo, que tiene una regla que acumula dólares cuando el precio es alto, y los usa cuando el precio es bajo, ¿cómo espera que funcione si el proceso del precio es el descrito más arriba.?
- f) ¿Cómo cambia su respuesta en e) si el precio del petróleo en dólares sigue un proceso de la forma donde M es una constante ? (Hint: analice el proceso en forma discreta y compare su comportamiento en plazos largos)

$$\frac{dP}{P} = \gamma(M - P) dt + \sigma dw$$

Solución Guía

Problema 1

a) De la parte anterior, reconociendo términos, se tiene que:

$$E[Y(t)] = E[e^{X(t)}] = e^{t/2}$$

$$V[Y(t)] = E[Y^2(t)] - E^2[Y(t)] = e^t (e^t - 1)$$

Propuesto: Calcular la parte anterior usando la función generadora de momentos.

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad E[\max(Y(T) - K, 0)] &= \int_0^\infty P\{Y(T) - K > a\} da \\ &= \int_0^\infty P\{ye^{X(T)} - K > a\} da \\ &= \int_0^\infty P\left\{X(T) > \log \frac{K+a}{y}\right\} da \\ &= \frac{1}{T\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \int_{\log[(K+a)/y]}^\infty \exp(-x^2/2T) dx da \end{aligned}$$

Problema 2

a) Para ver el proceso que sigue el derivado de S, basta usar el lema de Ito:

$$dF = \left[\frac{\partial F}{\partial S} a(S, t) + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} b^2(S, t) \right] dt + \left[\frac{\partial F}{\partial S} b(S, t) \right] dz$$

Luego se tiene:

$$dF = (\mu - r)Fdt + \sigma Fdz$$

b) De manera análoga, se tiene:

$$dF = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz$$

Luego, haciendo:

$$\text{c)} \quad dF = d \ln(S) \rightarrow \ln(S_T) \sim N\left[\ln S_0 + (\mu - \sigma^2/2)T, \sigma\sqrt{T}\right]$$

d) Propuesto: Hint: use la pregunta 1 y reconozca términos.

Problema 3

a) $dV = dP_1 \cdot Q_1 + dP_2 \cdot Q_2$

luego multiplicando y dividiendo por V

$$\frac{dV}{V} = \frac{dP_1 \cdot Q_1}{V} + \frac{dP_2 \cdot Q_2}{V} = \frac{dV_1}{V_1} \cdot \frac{V_1}{V} + \frac{dV_2}{V_2} \cdot \frac{V_2}{V} = v_1 \frac{dV_1}{V_1} + v_2 \frac{dV_2}{V_2}$$

con $v_1 + v_2 = 1 \forall t$

Es fácil ver que

$$\frac{dV_i}{V_i} = \frac{Q_i \cdot dP_i}{P_i \cdot Q_i} = \frac{dP_i}{P_i}$$

por lo que

$$\frac{dV}{V} = v_1 \frac{dP_1}{P_1} + v_2 \frac{dP_2}{P_2}$$

como dP_i/P_i son normales y los v_i en t no son estocásticos, entonces dV/V también es normal

$$\frac{dV}{V} = v_1 (\mu_1 dt + \sigma_1 dZ_1) + v_2 (\mu_2 dt + \sigma_2 dZ_2) = (v_1 \mu_1 + v_2 \mu_2) dt + v_1 \sigma_1 dZ_1 + v_2 \sigma_2 dZ_2$$

luego podemos definir que

$$\mu \equiv v_1 \mu_1 + v_2 \mu_2$$

y además definir

$$\sigma \equiv \sqrt{v_1^2 \sigma_1^2 + v_2^2 \sigma_2^2 + 2 \cdot \rho \cdot v_1 \cdot v_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2}$$

notar que tanto μ como σ dependen del tiempo.

Luego podemos escribir que

$$\frac{dV}{V} = \mu(t) dt + \sigma(t) dZ$$

b) Basta entonces encontrar $x = \mu - 2\sigma = 4,333\% - 2 \cdot 8,33\% = -12,32\%$

Problema 4

Como la variable S sigue un proceso browniano geométrico:

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \Delta Z$$

podemos entonces escribir que,

entonces la variable S, se distribuye log-normal en un instante t_k cualquiera, estará dada por (Usando Ito):

$$S(t_{k+1}) = S(t_k) * \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) * \Delta t + \sigma * \sqrt{\Delta t} * Z(t_k)\right) \quad \text{con } Z(t_k) \sim N(0,1)$$

Como $\mu=2\%$, $\sigma=10\%$ t $S(0)=100$, se tendrá que la variable S en t estará definida por la variable aleatoria:

$$\begin{aligned} S(5) &= 100 * \exp\left((0.02 - 0.05) * 5 + 0.1 * \sqrt{5} * Z\right) \\ &= 100 * \exp(0.075 + \sqrt{0.05} * Z) \end{aligned}$$

Con lo cual el incremento en el precio estará dada por la variable aleatoria

$$S(5) - 100 = 100 * (\exp(0.075 + \sqrt{0.05} * Z) - 1) \quad \text{que es log-normal}$$

b) A partir de la parte (a), se obtiene que valor de la variable S, en cinco meses más está dado por:

$$E(S(5)) = 100 * E(\exp(0.075 + \sqrt{0.05} * Z))$$

o de manera equivalente,

$$E(S(5)) = 100 * E(\exp(Y)) \quad \text{donde } Y \sim N(0.075, 0.05)$$

Utilizando la indicación, se tiene que $E(\exp(Y)) = \exp(0.075 + 0.025) = 1.052$, con lo cual $E(S(5)) = 105.2$

c) el proceso de Wiener discreto, también lo podemos ver de la siguiente manera

$$r_i = \left(\frac{\Delta S}{S} \right)_i = \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_i \quad \text{con } \varepsilon \sim N(0,1)$$

Con lo cual, si $\varepsilon_1=0.702$, $\varepsilon_2=-1.335$, $\varepsilon_3=1.442$, $\varepsilon_4=0.02$, $\varepsilon_5=0.691$, se tendrá que los retornos estarán dados por $r_1=9.02\%$, $r_2=-11.35\%$, $r_3=16.42\%$, $r_4=2.22\%$, $r_5=8.9\%$ y por lo tanto la trayectoria va a estar dada por $100 \cdot (1+r_1) \cdot (1+r_2) \cdot (1+r_3) \cdot (1+r_4) \cdot (1+r_5)$

Problema 5

a)

$V = PS$, luego diferenciando:

$$dV = dPS + dSP (*)$$

Reemplazando dP y dS en (*):

$$dV = (P\alpha dt + P\sigma_p dw)S + (S\mu dt + S\sigma_s dz)$$

$$dV = V\alpha dt + V\sigma_p dw + V\mu dt + V\sigma_s dz$$

$$\frac{dV}{V} = (\alpha + \mu)dt + (\sigma_p dw + \sigma_s dz)$$

Por lo tanto, V se distribuye como un MBG.

Alternativamente, sea $\ln(V) = \ln(P) + \ln(S)$, entonces como $\ln(P)$ y $\ln(S)$ siguen un proceso de Wiener con drift fijo, la suma seguirá un proceso similar con drift igual a la suma de los drifts originales. Además, como $dz + dw$ se puede llamar dy con $E(dy) = 0$ y $V(dy) =$ la suma de las varianzas por dt .

b)

Si dV/V se distribuye $N([\alpha + \mu]dt, (\sigma_p^2 + \sigma_s^2)dt)$, donde $N(\text{media, varianza})$, entonces:

$$\text{por Ito sabemos que } \ln(V(T)/V(0)) \text{ se distribuye } N\left(\left[\alpha + \mu - \frac{\sigma_p^2 + \sigma_s^2}{2}\right]T, [\sigma_p^2 + \sigma_s^2]T\right),$$

luego, para un proceso de Ito, tal que:

$$\ln(X(T)/X(0)) \text{ se distribuye } N(\theta T, \sigma^2 T),$$

sabemos que:

$$E(X) = X_0 e^{(\theta + \sigma^2 / 2)T}, \theta = \tau - \sigma^2 / 2$$

lo que implica que:

$$E(V) = V_0 e^{(\alpha + \mu)T}$$

c)

Siguiendo el mismo razonamiento anterior,

$$E(S) = 550 = 535 e^{\mu * 360} \Rightarrow \mu = 0.00768\% \text{ diario} \Rightarrow 2.77\% \text{ anual}$$

d)

Volatilidad crece ya que es raíz de $(\sigma_p^2 + \sigma_s^2 + 2\rho\sigma_p\sigma_s)dt$

Pero su valor esperado no cambia (está dado por la parte b)

e)

Si el precio de referencia es fijo, entonces un proceso como el de arriba nunca se va a distribuir alrededor de este precio de referencia por que el proceso no es estacionario en media. Es decir diverge, luego en promedio siempre o acumula en forma explosiva o se agota con probabilidad 1. Ahora en el corto plazo, dependiendo del precio de referencia escogido podría funcionar, pero dada su naturaleza de camino aleatorio, requeriría ajustes permanentes del precio de referencia para que no terminara o llenos de dinero o bien vacío.

f)

Si el precio sigue un proceso como al anterior, notar que en el largo plazo si $P_{t+1} = P_t$, entonces $P_t = M$. Es decir es un proceso que converge a M. Luego sí es estacionario. SI el precio de referencia es M entonces el proceso acumulará y desacumulará cantidades similares por lo que en promedio estará en cero, y cumplirá su función como fondo de estabilización.