

# **Matemáticas Financieras**

Semestre Primavera 2005

## **Problemas básicos en Finanzas: Valor del tiempo y el riesgo**

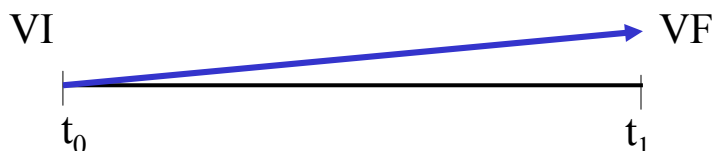
Concentremos la atención en el problema del tiempo

**1 millón de pesos hoy, o bien en un año más...  
Por qué valen diferente?**

- Preferencias
- Costo alternativo
- (Riesgo)

## La tasa de interés permite relacionar valores hoy con valores futuros

Un monto inicial **VI** se transforma en **VF**  
a través de una tasa de interés **r**



$$VF = VI \times (1 + r \times t) = VI + \text{Intereses}$$

$$\text{Intereses} = VI \times r \times t$$

$$t = t_1 - t_0$$

## Ejemplo, Caso de un depósito a plazo

- Si la tasa es de 0.8% mensual, y se invierten \$12 millones a 60 días plazo, entonces,

- $VF = 12 \times (1 + 0.8/100 \times 2) = \text{M\$ } 12.192$

$$\text{Intereses} = \$192,000$$

Al término  $0.8/100 \times 2 = 0.16/100$

se le denomina interés efectivo

**Qué ocurre si renovamos el depósito por 2 meses más a la misma tasa?**

## Renovando el depósito a plazo

El monto al final de los 4 meses será:

$$MF = 12.192 \times (1 + 0.8/100 \times 2) = \text{M\$ } 12.387072$$

o bien,

$$12 \times (1 + 0.8/100 \times 2)^2$$

Al tomar el depósito por cuatro meses (en vez de renovarlo) obtenemos,

$$12 \times (1 + 0.8/100 \times 4) = \text{M\$ } 12.384$$

es decir 3,702 pesos menos que al renovarlo.

**Por qué no entonces renovarlos siempre?**

## Interés Compuesto

- Generalmente se usa para inversiones a plazos superiores a 1 año (bonos), o cuando los intereses y el capital se re-invierten a la tasa original.
- Caso de créditos a plazos superiores a 1 año
- Lo importante es cómo se determinan los flujos de caja futuros: conocer su mecánica

## Intereses

- **La tasa de interés no es un concepto único. Depende de:**
- **Convenciones medición del tiempo:**
  - Base 360, Base 365
  - días calendarios, días hábiles, años bisiestos, etc.
- **Composición de intereses**
  - lineal
  - anual
  - semestral
  - mensual
  - diario
  - continuo

## Conceptos básicos

- **Evitar confusión: trabajar con concepto de riqueza final.**
- **Por cada \$1 invertido hoy, en cuánto se transforma al final del período.**
- **Ejemplo: un depósito a plazo a 90 días ( entre el 13/12/99 y el 13/3/00) de 1000 UF genera al final del período 1013,902.**
- **Más específicamente  $RF=1,013902778$  en el intervalo antes mencionado. Esto equivale a:**
  - **5.500% tasa lineal**
  - **5,474% tasa composición mensual**
  - **etc.**

## Convenciones de Composición de Intereses

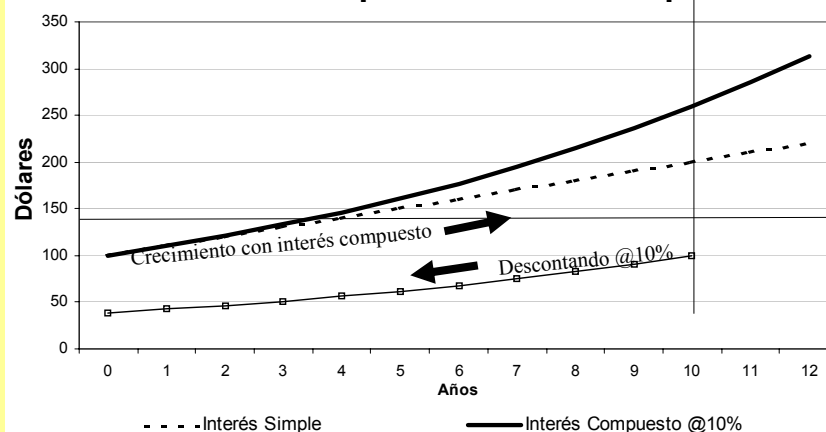
- Si la frecuencia de composición de intereses en un año es  $f$  y si la tasa de interés (anual) que se aplica en un intervalo de tiempo es  $r$ , entonces podemos definir que al invertir \$1 generamos:

$$W = \left( 1 + \frac{r}{f} \right)^{t \cdot f}$$

- donde  $t$  es el tiempo expresado en años.
- Si  $f=2$  composición es semestral
- Si  $f=1$  es anual
- Si  $f=360$  composición es diaria

## Interés Compuesto - Intervalos

### Interés Compuesto versus Simple



## Interés Compuesto – Capitalización Continua

- Con pago de intereses compuestos continuamente, el valor presente de un flujo en el tiempo  $t$  es igual a:

$$VP = C_t \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}} = C_t e^{-rt}$$

- Si un banco cotiza 10% compuesto continuamente, la tasa anual efectiva es igual a:  
 $e^{0.10} - 1 = 0.1052$  o bien 10.52%
- Con tasas compuestas continuamente, el valor presente de una perpetuidad es equivalente a que el siguiente pago sea inmediatamente:

$$VP = \frac{C_0}{r - g}$$

## Capitalización Continua – Ejemplo (I)

**Perpetuidad de \$1 a una tasa de 10% anual compuesta anualmente.**

$$VP = \frac{C_1}{r} = \frac{1}{0.10} = \$10$$

- Una tasa de 10% compuesta anualmente es equivalente a:

$$e^r = 1.1, \text{ es decir } r = 0.0953, \text{ o bien } 9.53\%$$

$$VP = \frac{C_0}{r} = \frac{1}{0.0953} = \$10.492$$

- Si comparamos con la convención de mediados de año usada en evaluación de proyectos con tasas compuestas anualmente:

$$VP = \frac{C_1}{r} (1+r)^{1/2} = \frac{1}{0.10} (1.1)^{1/2} = \$10.488$$

## Ejemplo (II) – Regla del 72 (y el 69)

- Con composición discreta, el tiempo que se demora \$1 en doblarse se puede aproximar usando:

$$\text{Tiempo para doblar} = \frac{72}{r(\%)}$$

- Con composición continua, si definimos como  $t$  el tiempo para doblar:

$$e^{rt} = 2$$

$$\ln(e^{rt}) = \ln(2) = 0.693$$

$$rt = 0.693$$

$$t = \frac{0.693}{r}$$

## Factores de Riqueza

- **Definición**

Definimos al factor de riqueza  $W$  como la riqueza final en un intervalo cuando se invierte \$1 al inicio de dicho intervalo.

- **Propiedad Multiplicativa:**

Factores de riqueza de intervalos de tiempo contiguos:

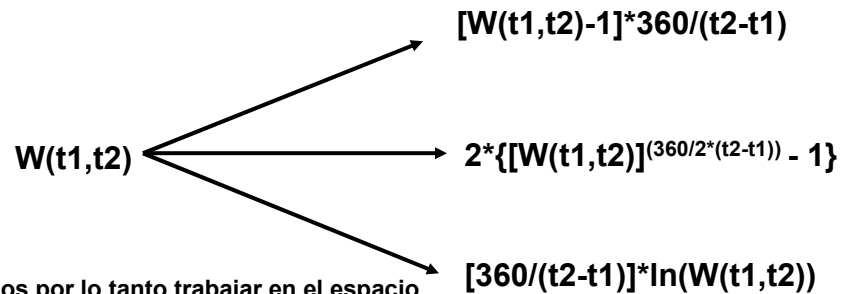
$$W(t1, t2) \text{ y } W(t2, t3)$$

Entonces:

$$W(t1, t3) = W(t1, t2) * W(t2, t3)$$

## Representación de factores de riqueza

- Un factor de riqueza  $W(t_1, t_2)$  puede representarse entonces por diversas tasas de interés:

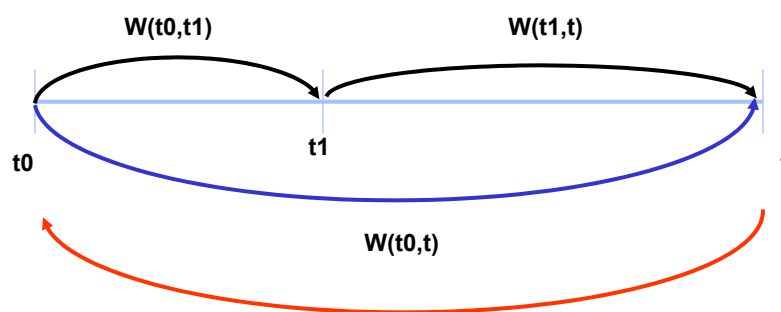


Podemos por lo tanto trabajar en el espacio que más nos acomode, sin perder de vista el factor de riqueza que queremos representar

...

## Factores de riqueza y Factores de descuento

Fijando la fecha inicial como la fecha de hoy, podemos entonces relacionar los factores de riqueza con los factores de descuento

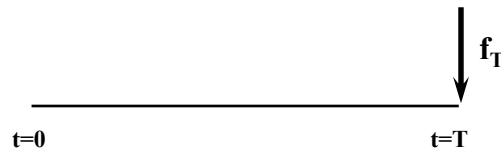


$$d(t_0, t) = d_t = 1 / W(t_0, t)$$



## Valorización de instrumentos financieros

- ¿Cómo valorizar un activo financiero?



Valor Presente:

- Valor hoy de recibir \$1 hoy es \$1
- Valor hoy de recibir \$1 en T es  $d_T$  (factor de descuento)
- El valor hoy de recibir  $f_T$  es:

$$V = f_T \times d_T$$

## Usando la información de mercado para calcular los factores de descuento

- Principio de eficiencia de mercado
- Condición de no arbitraje
  - Poderosa herramienta en finanzas
- Supuestos de mercados completos

## El valor del dinero en una fecha T

Usando el principio de no arbitraje



Mercado en fecha  $t=0$ :  $\frac{\$1}{(1 + r_T d/360)^T}$

Instrumento  $S_T$  promete pagar un interés anual  $r_T$  al plazo T (d días hasta la fecha T)

Un nuevo instrumento promete pagar \$1 en la fecha T. Su valor deberá compararse con el costo alternativo.

Valor de mercado de recibir \$1 en fecha T será:  $\frac{1}{(1 + r_T d/360)^T}$

## Valor de un conjunto conocido de flujos futuros

Instrumento a valorizar:

$$S^* = [fc_1 \quad fc_2 \quad \dots \quad fc_n]$$

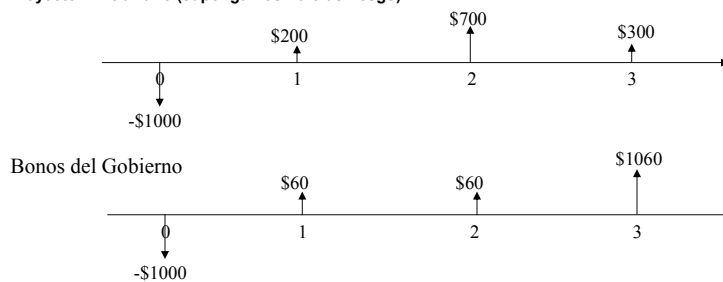
Mercado provee los factores de descuento:

Valor Presente de  $S^*$

$$V^* = fc_1 \times d_1 + fc_2 \times d_2 + \dots + fc_n \times d_n$$

## Introducción al Valor Presente Neto (I)

- Para lograr asignar recursos escasos, necesitamos tener una métrica única para comparar el valor de los activos.
- El concepto de valor presente neto aparece como una respuesta a esta necesidad: un solo número resume un conjunto de flujos dispersos en el tiempo.
- Ejemplo:
  - Usted tiene la posibilidad de invertir en una de las siguientes dos alternativas:
    - Proyecto inmobiliario (supongamos libre de riesgo)



## Introducción al Valor Presente Neto (II)

- Para poder comparar las dos alternativas de inversión debemos resumir ambos flujos de caja a un sólo valor.
- Por ejemplo:
  - Si definimos valor presente neto igual a:

$$VPN = \sum_{t=0}^T \frac{C_t}{(1+r)^t}$$

Podemos calcular el valor presente de ambos flujos suponiendo una tasa de descuento anual igual a 6%.

VPN@6% (proyecto inmobiliario) = \$64

VPN@6% (bono del gobierno) = \$0

Es decir, preferiríamos el proyecto inmobiliario frente a invertir en bonos del gobierno.

## Supuestos y fórmulas básicas del valor presente

- El valor presente es aditivo:

$$PV(C_1, C_2, \dots, C_t, \dots, C_T) = PV(C_1) + PV(C_2) + \dots$$

- Los inversionistas descuentan por tiempo y riesgo

$$PV(C_t) = FD_t C_t, \text{ donde } FD < 1$$

- Convenciones de escritura

$$FD_t = \frac{1}{(1+r_t)^t}$$

$$VP = \frac{C_1}{1+r_1} + \frac{C_2}{(1+r_2)^2} + \dots + \frac{C_T}{(1+r_T)^T} = \sum_{t=1}^T \frac{C_t}{(1+r_t)^t}$$

- $r_t$  is la tasa relevante para el período  $t$

## Inflación

- En Chile las tasas de descuento están normalmente cotizadas en términos reales. Por el contrario, en Estados Unidos están normalmente cotizadas en términos nominales.

- Si la tasa de inflación para un período es  $i$ , entonces:

$$(1+r(\text{real})) = (1+r(\text{nominal})) / (1+i)$$

- Lo clave es ser consistente en el tratamiento de la inflación.

## Atajos (I)

### ■ Perpetuidades

- Ejemplo: Bono que paga un monto fijo ( $C_1$ ) cada año.

$$VP = \frac{C_1}{1+r} + \frac{C_1}{(1+r)^2} + \frac{C_1}{(1+r)^3} + \dots$$

$$VP \text{ (Flujos del bono)} = C_1/r$$

- La rentabilidad de una perpetuidad es igual a:

$$r = C_1 / VP$$

## Atajos (II)

### ■ Perpetuidades crecientes

- **Ejemplo: Sueldos con incrementos reales anuales.**

$$VP = \frac{C_1}{1+r} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \frac{C_3}{(1+r)^3} + \dots$$

$$VP = \frac{C_1}{1+r} + \frac{C_1(1+g)}{(1+r)^2} + \frac{C_1(1+g)^2}{(1+r)^3} + \dots$$

$$VP = \frac{C_1}{r-g}$$

- **En general hay que ser muy cuidadosos con asumir perpetuidades crecientes (ej: valor terminal de proyectos).**

### Atajos (III)

- **Anualidades: activo que produce un flujo fijo por un número determinado de año**

$$VP = \frac{C_1}{1+r} + \frac{C_1}{(1+r)^2} + \dots + \frac{C_1}{(1+r)^T}$$

$$VP = \sum_{t=1}^T \frac{C_1}{(1+r)^t}$$

$$VP = C_1 \left[ \frac{1}{r} - \frac{1}{r(1+r)^T} \right]$$

### Atajos (IV)

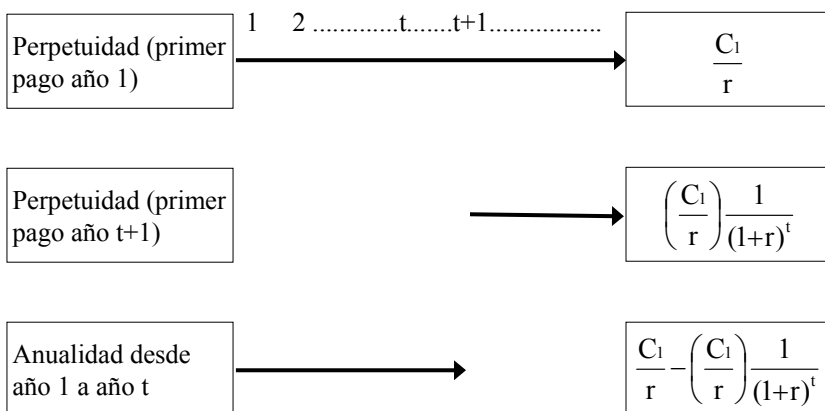
- **Ejemplo de anualidades:**

- Crédito hipotecario a 20 años
- Pago anual \$100.000
- Tasa de interés: 20%

$$VP = 100.000 \left[ \frac{1}{0.2} - \frac{1}{0.2(1.2)^{20}} \right] = \$487.000$$

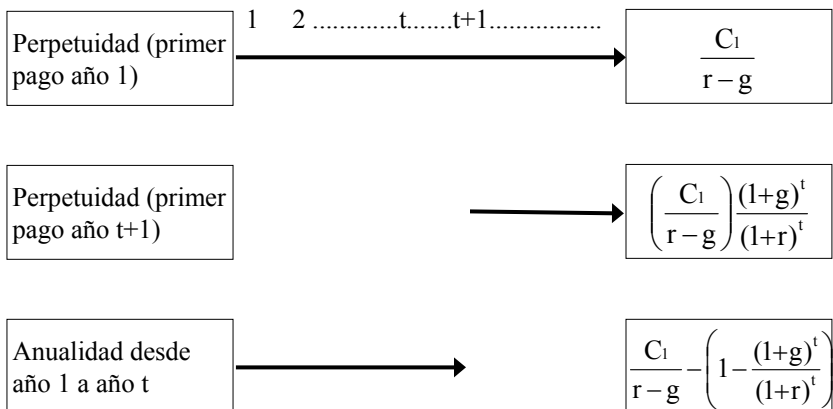
## Atajos (V)

- Una anualidad puede ser vista como la diferencia entre dos perpetuidades:



## Atajos (VI)

- Similarmente se puede valorizar una anualidad creciente



## Atajos (VII)

### ■ Ejemplo de anualidades crecientes:

$$- C_1 = 50; \quad T=15 \quad r=0.12 \quad g=0.04$$

$$PV = \frac{C_1}{r-g} \left( 1 - \frac{(1+g)^T}{(1+r)^T} \right)$$

$$PV = \frac{50}{0.12 - 0.04} \left( 1 - \frac{(1+0.04)^{15}}{(1+0.12)^{15}} \right) = 419.36$$

- Alternativamente, podríamos transformar el problema a una anualidad simple descontada a:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1.04}{1.12} \Rightarrow x = 0.07692$$

$$PV = \frac{C_1}{0.08} \left( 1 - \frac{1}{(1+x)^T} \right) = \frac{50}{0.08} \left( 1 - \frac{1}{(1.07692)^{15}} \right) = 419.36$$

## Tasas spots

- La tasa spot  $r_t$  es la tasa de interés expresada en términos anuales, aplicada al dinero mantenido desde hoy ( $t=0$ ) hasta el período  $t$ .
- Si  $r_2$  es la tasa de interés, anual, pagada a dos años, el factor de descuento es  $1/(1+r_2)^2$

**Ejemplo 1: Valorización de un único pago de \$10 en 3 años.**

$$VP = \frac{10}{(1+r_3)^3}$$

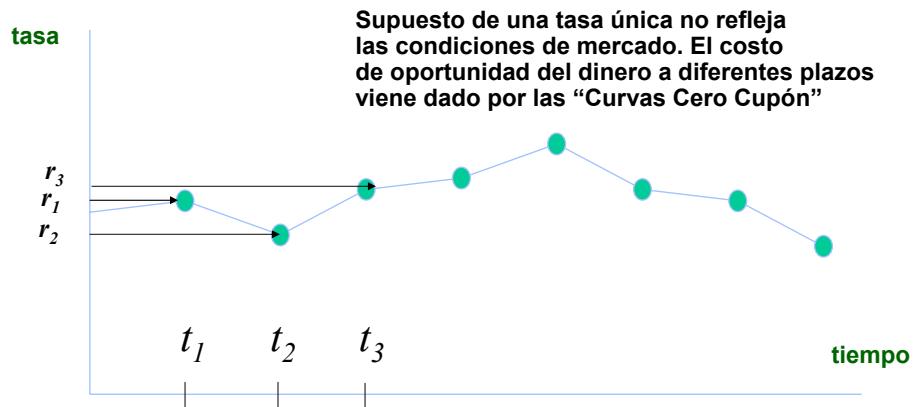
**Ejemplo 2: Valorización de un bono con cupones anuales de \$10 por año con un pago de 100 al final.**

$$VP = \frac{10}{(1+r_1)} + \frac{10}{(1+r_2)^2} + \frac{110}{(1+r_3)^3}$$



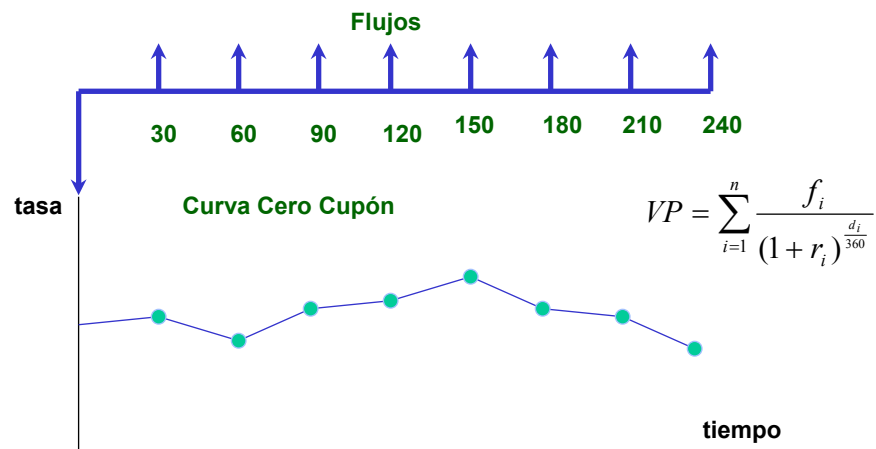
## Introducción a las curvas cero cupón

### ■ Curvas cero cupón



## Introducción a las curvas cero cupón

### ■ Valorización por costo de oportunidad

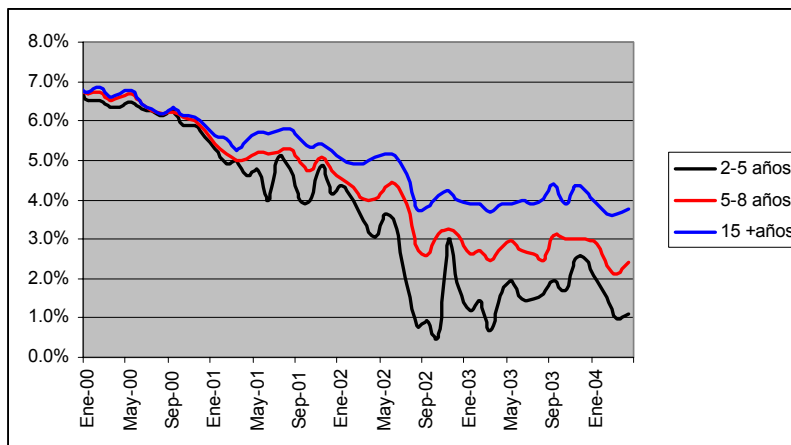


## Estructura de tasas

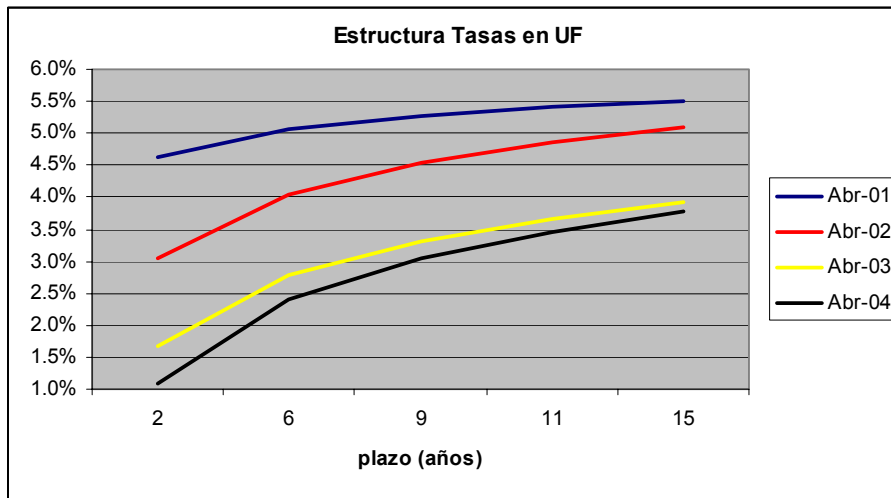
- Tasas de interés cambian de acuerdo a los plazos. La estructura de tasas refleja, para un momento determinado del tiempo, el costo de oportunidad del inversionista, a diferentes plazos.
- La estructura de tasas es la herramienta fundamental del pricing.
- Se puede representar como:
  - Curva Cupón Cero
  - Curva de Rendimientos (Yield Curve)
  - Curva de Factores de Descuento
- Además, combinaciones de curvas de interés pueden generar curvas de monedas, curvas de tasas forwards, etc.

## El caso de las tasas de interés recientes

- TIR medias papeles en UF, Bolsa de Comercio



## Estructura de Tasas y el riesgo de tasas

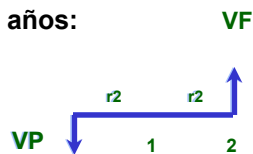


## Tasas Forwards

### ■ Dos maneras de invertir \$1 en un período de 2 años:

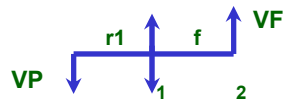
- Invertir hoy \$1 a dos años a una tasa anual de  $r_2$ :

$$VF = (1+r_2)^2$$



- Invertir hoy \$1 a un año a una tasa anual de  $r_1$ , y lo obtenido prestarlo hoy a una tasa  $f$  (anual) por un año a partir del fin del primer año:

$$VF = (1+r_1)(1+f)$$



### ■ Si ambas están disponibles (y riesgos similares) entonces deberían rentar lo mismo:

$$(1 + r_2)^2 = (1 + r_1)(1 + f)$$

$$f = \frac{(1 + r_2)^2}{(1 + r_1)} - 1$$

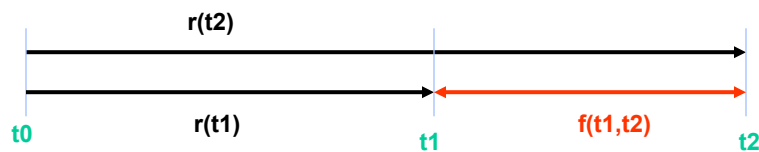
## En general, para tasas forwards:

- Caso composición lineal:  
( $t_2 > t_1$  en días), tasa anual.

$$f(t_1, t_2) = \left[ \frac{1 + r(t_2) \cdot \left( \frac{t_2 - t_1}{360} \right)}{1 + r(t_1) \cdot \left( \frac{t_1 - t_0}{360} \right)} - 1 \right] \cdot \left( \frac{360}{t_2 - t_1} \right)$$

Otro caso interesante: composición continua.

$$f(t_1, t_2) = r(t_2) \cdot t_2 / (t_2 - t_1) - r(t_1) \cdot t_1 / (t_2 - t_1)$$



## Tasas forwards y sus plazos

Las tasas forwards tienen, para una fecha inicial determinada (hoy) una fecha inicial y otra final.

Equivalentemente, tienen una fecha inicial y un plazo:

$$f(t_1, t_1 + t)$$

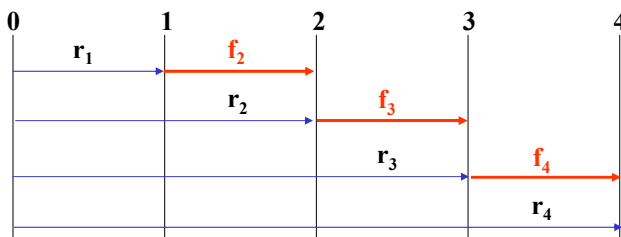
Podemos entonces hablar de forwards de 1 año, ( $t=360$  días)

o forwards de 6 meses

o forwards de 3 meses...o forwards de 1 día.

## Tasas spots y forward

- Las tasas spots  $r_1, r_2, \dots, r_t$  contienen tasas forward bien definidas.



- Cada tasa spot dura 1 período aunque podemos pensar también en tasas forward de mayor plazo.
- Las tasas forward pueden ser aseguradas invirtiendo con mayores periodos de maduración.
- Las actuales tasas spots futuras  $r_2, r_3$  etc. diferirán de las correspondientes tasas forward actuales.
- Pruebe que en un mundo sin incertidumbre, las tasas spot y forward deben ser iguales.

## Tasas spots y forward – Ejemplo 1

- Cuáles son las tasas forward implícitas en las siguientes tasas forward?

–  $r_1 = 0.04$

–  $r_2 = 0.05$

–  $r_3 = 0.055$

$$(1+r_2)^2 = (1+r_1)(1+f_2)$$

$$(1.05)^2 = (1.04)(1+f_2), \text{ entonces } f_2 = 0.0601$$

$$(1+r_3)^3 = (1+r_2)^2(1+f_3)$$

$$(1.055)^3 = (1.05)^2(1+f_3), \text{ entonces } f_3 = 0.06507$$

## Tasas spots y forward – Ejemplo 2

- Ud. Recibirá \$1 millón de dólares en un año más, tiene una importante inversión en el año 2 y quiere asegurar que podrá invertir en el año 1 el millón de dólares a la tasa forward actual.

–  $r_1 = 5\%$ ;  $r_2 = 7\%$

⇒ El retorno en los dos periodos es:  $1.07^2 = 14.5\%$

La tasa forward la calculamos haciendo:  $(1.05)(1+f_2)=1.145 \Rightarrow f_2 = 9.04\%$

Transacciones:

Tiempo 0: Solicitar un préstamo por 0.9524 por 1 año (5%)

Tiempo 0: Invertir 0.9524 por 2 años (7%)

	T=0	T=1	T=2
Préstamo por 1 año	0.9524	-1.0	0
Inversión por 2 años	-0.9524	0	1.0904
Neto	0	-1.0	1.0904

## Tasas spots y forward – Ejemplo 2 (Cont)

- Suponga ahora que quiere poder asegurar un préstamo a partir del año 1 pero a la tasa forward actual. Como lo haría?

	T=0	T=1	T=2
Préstamo de 0.9524 por 2 años	0.9524	0	-1.0904
Inversión de 0.9524 por 1 año	-0.9524	1.0	0
Neto	0	+1.0	-1.0904

- Desafortunadamente el banco insiste que ud. pague intereses a una tasa fija anual por el préstamo a 2 años. Cómo podría ud. Asegurar la tasa forward para un préstamo en el año 1?

## Tasas spots y forward – Ejemplo 2 (Cont)

- Calcular el retorno requerido en un préstamo a dos años.

$$1 = \frac{y}{1.05} + \frac{1+y}{1.07^2} \Rightarrow y = 0.0693$$

- Entonces el pago al banco es de 1.0693 por cada peso de crédito solicitado hoy. Queremos que el pago final sea de 1.0904, entonces hay que pedir un préstamo hoy por  $1.0904/1.0693 = 1.0197$  e invertir los ingresos por un solo período.

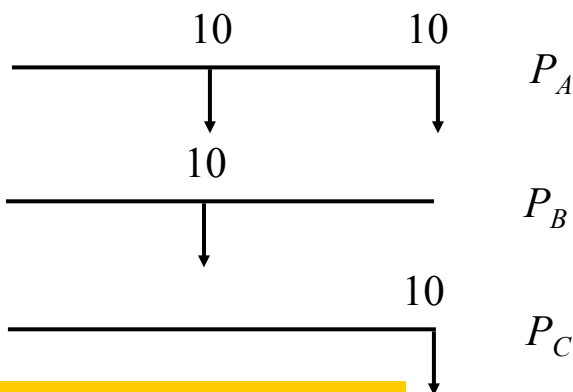
	T=0	T=1	T=2
Préstamo de 1.0197 por 2 años a $y=6.93\%$	1.0197	-0.0707 $=6.93\% * 1.0197$	-1.0904 $=1.0693 * 1.0197$
Inversión de 1.0197 por 1 año a 5%	-1.0197	1.0707 $=1.05 * 1.0197$	0
Neto	0	+1.0	-1.0904

## Principio básico de no arbitraje

- Ejemplo, bono A:

- Bono B:

- Bono C:



¿Qué ocurre si  $P_B + P_C > P_A$ ?

## Medición de la estructura temporal

- En equilibrio, **TODOS** los bonos del gobierno son valorizados por el mercado usando las **MISMAS** tasas spots.

Precio	1	2	3	t
A (T = 2) $P_A$	$\frac{C_{A1}}{1+r_1}$	$+\frac{C_{A2}}{(1+r_2)^2}$		
B (T = 3) $P_B$	$\frac{C_{B1}}{1+r_1}$	$+\frac{C_{B2}}{(1+r_2)^2}$	$+\frac{C_{B3}}{(1+r_3)^3}$	
C (T = 3) $P_C$	$\frac{C_{C1}}{1+r_1}$	$+\frac{C_{C2}}{(1+r_2)^2}$	$+\frac{C_{C3}}{(1+r_3)^3}$	
D (T = 3) $P_D$	$\frac{C_{D1}}{1+r_1}$	$+\frac{C_{D2}}{(1+r_2)^2}$	$+\frac{C_{D3}}{(1+r_3)^3}$	$+\dots + \frac{C_{Dt}}{(1+r_t)^t}$

- A, B, C son suficientes para calcular  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_3$

## Medición de la estructura temporal – Ejemplo I

Bono	Precio	$C_1$	$C_2$	$C_3$
X	1038.5	1080		
Y	1000.46	50	1050	
Z	1069.23	80	80	1080

- Solución:

$$X \quad 1038.50 = \frac{1080}{1+r_1} \Rightarrow r_1 = 4\%$$

$$Y \quad 1000.46 = \frac{50}{1.04} + \frac{1050}{(1+r_2)^2} \Rightarrow r_2 = 5\%$$

$$Z \quad 1069.23 = \frac{80}{1.04} + \frac{80}{1.05^2} + \frac{1080}{(1+r_3)^3} \Rightarrow r_3 = 5.5\%$$

- Suponer que el valor par es \$1000



## Ejemplo de oportunidades de arbitraje

Bono	Precio	$C_1$	$C_2$	$C_3$
A	870	100	100	1000
B	901	110	110	1020
C	813	85	85	955
D	830	90	90	980
E	819	70	70	1000

■ Solución:

Portafolio	Precio	$C_1$	$C_2$	$C_3$
B+D-2A	-9	0	0	0

- Arbitraje implica que dos flujos de la misma fecha son valorizados con distintas tasas spots.