La Estructura temporal de la tasa de interés y la Valorización de Instrumentos de Renta Fija

Consideramos la valoración de inst. de renta fija sin riesgo de pago. Los instrum. de R.F. son obligaciones con pagos fijos prometidos en fechas fijas.

En general, los únicos que son libres de riesgo son los bonos de gobierno.

Sea $P_t(\tau)$ el precio de un bono en t que paga \$1 en $t+\tau$.

r_t = tasa de interés libre de riesgo entre $t-1$ y t.

Consideramos los bonos con vencimiento τ_1 y τ_2 en $t=0$.

El retorno de mantener un bono j entre 2 períodos es:

$$\frac{P_1(\tau_j-1)}{P_0(\tau_j)} \qquad j=1,2.$$

Supongamos que:

$$\frac{P_1(z_1-1)}{P_0(z_1)} < \frac{P_1(z_2-1)}{P_0(z_2)}$$

Entonces cualquier inversionista va a preferir comprar el bono 2.

En equilibrio

$$(1) \qquad \frac{P_1(z_1-1)}{P_0(z_1)} = \frac{P_1(z_2-1)}{P_0(z_2)}$$

ahora, $P_t(0) = 1$ y

$$(2) \qquad \frac{P_t(0)}{P_{t-1}(1)} \equiv 1 + r_t$$

Es decir,

$$(3) \qquad \frac{P_1(z-1)}{P_0(z)} = 1 + r_1$$

o más general

$$(4) \qquad \frac{P_{t+1}(z-1)}{P_t(z)} = 1 + r_{t+1} \quad \forall\, t, z$$

Consideremos ahora un bono con vencimiento T. Es decir, $P_T(0) = 1$

(5) $$\frac{P_T(0)}{P_{T-1}(1)} = 1 + r_T$$

$$\Rightarrow \quad P_{T-1}(1) = \frac{P_T(0)}{1+r_T} = \frac{1}{1+r_T}$$

$$P_{T-2}(2) = \frac{P_{T-1}(1)}{1+r_{T-1}} = \frac{1}{(1+r_T)(1+r_{T-1})}$$

(6) $$\Rightarrow \quad P_0(T) = \frac{1}{\prod_{j=1}^{T}(1+r_j)}$$

(7) $$P_0(T) = \frac{1}{(1+R_T)^T}$$

donde $1 + R_T = \left(\prod_{j=1}^{T}(1+r_j)\right)^{1/T}$

es la tasa promedio compuesta

Entonces, dada la secuencia de tasas $(r_1, r_2, \ldots, r_T, \ldots)$ uno puede calcular el precio de los bonos para cualquier venc el proceso puede ser revertido; dado el precio actual para bonos de distintos vencimientos podemos calcular las tasas en el futuro.

$$(8) \quad r_t = \frac{v_0(t-1)}{v_0(t)} - 1 \qquad t = 1, 2 \ldots$$

antes teníamos

$$\frac{v_{t+1}(z-1)}{v_t(z)} = 1 + r_{t+1}$$

usando el mismo bono en 2 momentos del tiempo

De ahí:

$$(9) \quad \frac{v_t(z-1)}{v_{t-1}(z)} = \frac{v_0(t-1)}{v_0(t)}$$

Es decir, mirando los precios hoy para bonos de distintos venc. uno puede calcular la dinámica futura de los bonos.

En general, se usan las tasas promedio para describir los bonos

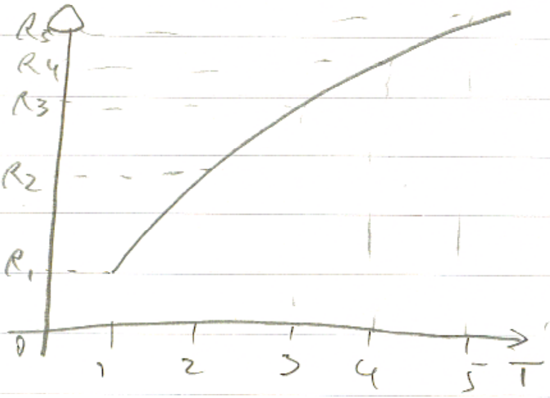
$$R_T = \left[P_0(T)\right]^{-1/T} - 1$$

La curva que se genera para ≠ valores de T se denomina la estructura temporal de las tasas.

Una estructura creciente es cuando

$$R_{T+1} > R_T \quad \forall T$$

Una estructura plana es $R_{T+1} = R_T \ \forall T$.
En general, la única restricción es que se cumpla (7).



Notar que $R_T \neq r_T$

La tasa R_T es el promedio y puede ser muy distinta a las tasas r_t.

10) $$\frac{(1+R_{T+1})}{(1+R_T)} = \left(\frac{1+r_{T+1}}{1+R_T}\right)^{1/T+1}$$

$$\Rightarrow R_{T+1} \gtreqless R_T \Leftrightarrow r_{T+1} \gtreqless R_T$$

$\Rightarrow$ si $\quad r_1 < r_2 < \ldots < r_{T^*}$

$$\Rightarrow R_T > R_{T-1} \text{ para } T = 1, \ldots, T^*$$

r_t es una tasa marginal y R_t es una tasa media. En general el peak de R_T ocurre después del peak en r_T.

11) $$\frac{\partial R_T}{\partial r_t} = \frac{1}{T}\left(\frac{1+R_T}{1+r_t}\right)$$

12) $$\frac{\partial(R_T - R_{T-1})}{\partial r_T} = \frac{1}{T}\frac{(1+R_T)}{(1+r_T)}$$

Cuando $T \to \infty$, $(12) \to 0$

Es decir, la estructura se aplana para vencimientos largos

Tiempo Continuo.

$r_c(t)$ = tasa de interes entre t y $t+dt$.

(13) $\Rightarrow$ $\dfrac{P_{t+dt}(\tau-dt)}{P_t(\tau)} = 1 + r_c(t)\,dt$.

(14) $$P_0(T) = e^{-\int_0^T r_c(s)\,ds}$$

si $R_c(T)$ es la tasa promedio compuesta continua $\Rightarrow$

(15) $P_0(T) = e^{-R_c(T)\cdot T}$ ó

(16) $$R_c(T) = \frac{1}{T}\int_0^T r_c(s)\,ds$$

(17) $$\frac{dR_c(T)}{dT} = \frac{-1}{T^2}\int_0^T r_c(s)\,ds + \frac{1}{T}r_c(T)$$

$$= \frac{1}{T}\left(r_c(T) - R_c(T)\right)$$

es decir, $\dfrac{dR_c(T)}{dT} \gtreqless 0 \iff r_c(T) \gtreqless R_c(T)$

Sea $V_0(\tilde{x})$ el precio de un inst. de R-F que paga \$ X_t en t, $t = 1, \dots, T$)

(18) $$V_0(\tilde{X}) = \sum_{\tau=1}^{T} X_\tau P_0(\tau) = \sum_{\tau=1}^{T} \frac{X_\tau}{(1+R_\tau)^\tau}$$

Si no habría arbitraje.

Supongamos que $V_0 > \sum_{\tau=1}^{T} X_\tau P_0(\tau)$.

Entonces un inversionista puede emitir un bono y comprar X_τ 0-cupones para cada τ. En $t=0$ recibe V_0 y debe pagar $\sum X_\tau P_0(\tau)$. En $t=\tau$, recibe X_τ y debe pagar X_τ.

Los bonos en general pagan cupones iguales C_j y un principal al vencimiento M_j. Entonces si B_j es el precio:

(19) $$B_j = \sum_{t=1}^{T_j} C_j P_0(t) + M_j P_0(T_j)$$

En general no existen precios para 0 cupones para todos los vencimientos. Sin embargo, si hay bonos lo suficientemente distintos

se puede resolver para $V_0(\tau)$ fácilmente.
Además, esto permite manufacturar 0 cupones

Retorno al vencimiento:

se define por:

$$B_j = \sum_{t=1}^{T_j} \frac{C_j}{(1+r^*)^t} + \frac{M_j}{(1+r^*)^{T_j}}$$

Duración: Para un 0-cupón, la duración es la cantidad de años al venc

$$(20) \quad D_j = \sum_{t=1}^{T_j} t \cdot \delta_t^j$$

$$\delta_t^j = \frac{C_j V_0(t)}{B_j}$$

$$\delta_T^j = \frac{(C_j + M_j)\, V_0(T_j)}{B_j}$$

Es la duración ponderada promedio del bono.

Otra definición es:

$$D_j' = \sum_{t=1}^{T_j} \rho_t^j \cdot t$$

$$\rho_t^j = \frac{C_j}{(1+r^*)^t B_j}$$

$$\left(\frac{r_j^*}{B_j}\right)\frac{\partial B_j}{\partial r_j^*} = -D_j'$$

Por ello es usado generalmente como una medida de la variabilidad del bono ante cambios en la tasa de interés, sin embargo, no es una buena medida puesto que cambios en las tasas de interés no afectan el retorno al vencimiento de todos los bonos por igual.

Valoración general de Renta Fija

$P(r,t;T)$ = precio de un 0-cupón libre de riesgo con vencimiento en T y de valor nominal \$ 1, en t con $r(t)=r$

$$P(r,T;T) = 1$$

Dinámica de r.

$$(1) \quad dr = h(r,t)\,dt + g(r,t)\,dz$$

$$g(0,t)=0 \text{ y } h(0,t)\geq 0$$

Retorno esperado de equilibrio.

$$(2) \quad E_t\left(\frac{dP}{P}\right) = [r + \Delta(r,t;T)]\,dt$$

El proceso Markov en (1) junto con Δ como función de r y t ⇒ que V es una función de r y t.

<u>Restricciones en Δ</u>

Sea $F^i(r, t)$ un activo que dep. sólo de r y t.

(3) $\frac{dF^i}{F^i} = \alpha^i\, dt + \sigma^i\, dz$

Por el lema de Itô,

(4a) $\alpha^i = \frac{\frac{1}{2}\rho^2 F^i_{rr} + \mu F^i_r + F^i_t}{F^i}$

(4b) $\sigma^i = \frac{F^i_r \cdot \rho}{F^i}$

Sea $V(t)$ el valor de un port en t que tiene N_i unidades de i con precio F^i, N_j de j con precio F^j y el resto $V - N_iF^i - N_jF^j$ en el activo libre de riesgo.

(5) $dV = rV\,dt + N_i(dF^i - rF^i dt) + N_j(dF^j - rF^j$

$$dV = rV\,dt + \left[N_i F^i(\alpha_i - r) + N_j F^j(\alpha_j - r)\right]dt$$
$$+ \left[N_i F^i \sigma^i + N_j F^j \sigma^j\right] dz.$$

Imponemos que $N_i^* F^i \sigma^i + N_j^* F^j \sigma^j = 0$, es decir

(6) $$N_i^* = -N_j \frac{F^j \sigma^j}{F^i \sigma^i} = -N_j \frac{F_r^j}{F_r^i}$$

$\Rightarrow$

(7) $$dV^* = rV^* dt + N_j F_r^j \sigma^j \left[-\frac{(\alpha^i - r)}{\sigma^i} + \frac{(\alpha^j - r)}{\sigma^j} \right] dt$$

Como V^* tiene un retorno cierto $\Rightarrow$

$$\frac{\alpha^i - r}{\sigma^i} = \frac{\alpha^j - r}{\sigma^j} \equiv \mathcal{L}(r,t) \quad \forall i,j$$

$\mathcal{L}$ puede depender sólo de r y t y no de ninguna característica específica el activo i o j.

(9) $$\alpha^j = r + \frac{F_r^j g(r,t)}{F^j} \mathcal{L}(r,t)$$
$$= r + \frac{F_r^j}{F^j} \psi(r,t)$$

Volviendo a los precios de los bonos: si α^T denota el retorno esperado instantáneo de un bono con vencimiento en $T \Rightarrow$

$$\alpha^T = r + \Delta(r, t; T)$$

y debe satisfacer por (4e)

(10) $$(r+\Delta)P = \frac{1}{2} g^2 P_{rr} + h P_r + P_t$$

s.a

$$|P(r,t;T)| \leq 1$$
$$P(r,T;T) = 1$$

si $\frac{dP}{P} = \alpha^T dt + \sigma^T dz \Rightarrow$

(11) $$\sigma^T = \frac{P_r \cdot g}{P}$$

De (8) se obtiene que $(\alpha^T - r)/\sigma^T = \mathcal{L}$ ó

(12) $$\Delta = \left(\frac{P_r}{P}\right) \varphi(r,t)$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{1}{2} g^2 P_{rr} + h P_r + P_t - rP - \frac{P_r}{P} P \varphi$$

(13) $$0 = \frac{1}{2} g^2 P_{rr} + [h - \varphi] P_r + P_t - rP$$

Generalmente para 0-cupones, $V_r < 0$.
Entonces, si $\psi > 0$, $\Delta < 0 \Rightarrow \alpha^T < r$. Si
$\psi = 0$, $\Delta = 0$ y $\alpha^T = r$ (no hay premio al riesgo).
Si $\psi < 0$, $\Delta > 0$ y $\alpha^T > r$

Para cualquier activo F^i

$$(13') \quad 0 = \frac{1}{2} g^2 F_{rr}^i + [h - \psi] F_r^i - r F^i + F_t^i$$

Un Modelo Especial

Cox, Ingersoll y Ross (1985)

$$h(r,t) = K(\theta - r) \text{ y}$$
$$g(r,t) = \sigma r^{1/2}$$

donde K, θ y σ son ctes

$$(14) \quad dr = K(\theta - r)\,dt + \sigma\sqrt{r}\,dz$$

Se espera que $\theta > 0$ y $K \geq 0$. Para $K > 0$,
$E(dr) = K(\theta - r)$ que es positivo si
$r < \theta$, 0 si $\theta = r$ y negativo si $r > \theta$
$\Rightarrow$ r tiene reversión a la media, o tiene una tendencia hacia la tasa de largo plazo θ. La fuerza o la velocidad de la reversión está dada por K. Si $K = \infty \Rightarrow$ $r = \theta$ siempre. Si $K = 0$, $\Rightarrow E_0(dr) = 0$.