

## GUÍA DE EJERCICIOS NÚMERO 1

## I. EJERCICIOS MODELO BÁSICO DE DOS PERÍODOS

1. **Consumo de Subsistencia.** Suponga una economía cerrada de dos períodos. En el primer período el individuo recibe  $y$  unidades de un bien perecible, y en el segundo período este crece a una tasa  $\gamma$ , es decir, recibe  $(1+\gamma)y$ . Su función de utilidad está dada por:

$$U(c_1, c_2) = \log(c_1 - \bar{c}) + \frac{1}{1+\delta} \log(c_2 - \bar{c}) \quad (1)$$

Donde  $\bar{c}$  corresponde al consumo de subsistencia.

- (a) Resuelva el problema del consumidor y encuentre la tasa de interés real de equilibrio.
  - (b) ¿Cómo afecta a  $r$  un aumento en  $\gamma$ ?, ¿y en  $\bar{c}$ ? Justifique.
  - (c) Suponga que el consumo de subsistencia es igual a cero. Compare la tasa de interés con la tasa de crecimiento de la economía. Dé una intuición para su resultado.
  - (d) Suponga que la economía se abre y enfrenta una tasa de interés internacional de  $r^*$ , menor que la de autarquía. ¿Qué pasa con la cuenta corriente en el período 1 y el consumo en ambos períodos? Compare la trayectoria de la economía abierta con la de autarquía.
2. Considere una economía habitada por un único individuo que vive por dos períodos. En esta economía no hay producción y el individuo recibe una cantidad de bienes perecibles  $y_1$  e  $y_2$  en los períodos 1 y 2 respectivamente. El individuo maximiza la siguiente función de utilidad de consumo en cada período:

$$U(c_1, c_2) = \log(c_1) + \beta \log(c_2) \quad (2)$$

La tasa de crecimiento de la disponibilidad de bienes es  $\gamma$ , esto es,  $y_2 = (1 + \gamma)y_1$ . Hay un gobierno que gasta sólo durante el período 1 una cantidad  $G$  de bienes, donde  $G$  es una fracción  $\theta$  de la dotación de bienes en el período 1, esto es,  $G = \theta y_1$ . Para financiar este gasto, el gobierno se endeuda, y para pagar la deuda cobra impuestos en el período 1.

- (a) Asuma que la economía es cerrada. Plantee y resuelva el problema del consumidor (encuentre  $c_1$  y  $c_2$  como función de la tasa de interés  $r$ ). Luego, usando las condiciones de equilibrio (incluida la restricción presupuestaria del gobierno), encuentre la tasa de interés de equilibrio. ¿Cómo se compara con la tasa de crecimiento de la economía?
- (b) ¿Cuál es el efecto de un aumento en el gasto de gobierno ( $\theta$ ) sobre la tasa de interés? ¿Cuál es el efecto de un aumento de la tasa de crecimiento ( $\gamma$ ) sobre la tasa de interés? Dé una clara intuición a sus resultados.
- (c) Suponga ahora que la economía se abre al comercio de bienes y servicios con el exterior y enfrenta una tasa de interés internacional igual a  $r^*$ . Encuentre los valores de  $c_1$  y  $c_2$  como función de la tasa de interés. Luego, encuentre la expresión para el saldo de la cuenta corriente en el período 1. ¿Para qué valores de  $r$  habrá un déficit en la cuenta corriente?
- (d) ¿Cuál es el efecto de un aumento en el gasto de gobierno ( $\theta$ ) sobre el saldo de la cuenta corriente en el período 1? ¿Cuál es el efecto de un aumento en la tasa de crecimiento sobre el saldo de la cuenta corriente en el período 1? Dé una clara intuición a sus resultados.

3. Considere un modelo de economía de dos períodos en que existen dos países. La función de utilidad del país local es:

$$U(c_1, c_2) = \log(c_1) + \beta \log(c_2) \quad (3)$$

El país extranjero tiene una función de utilidad similar, con sus niveles de consumo distinguidos por asteriscos. Las preferencias temporales son iguales para ambos países. El país local recibe bienes perecibles de  $y$  e  $y/2$  en los períodos 1 y 2, respectivamente, y similarmente  $y/2$  e  $y$  para el país extranjero.

- Determine la tasa de interés para ambos países, suponiendo que ambos se comportan como economías cerradas y explique cuál es mayor y por qué.
  - Suponga ahora que las economías se abren al comercio de bienes y a los flujos de capitales. Calcule la tasa de interés internacional de equilibrio,  $r^*$ . ¿Qué país tendrá superávit de cuenta corriente en el período 1, y por qué?
  - Si la dotación del país local es constante e igual a  $y$  en ambos períodos, recalcule la tasa de interés de autarquía y la tasa de interés internacional de equilibrio.
  - Compare el bienestar de las partes b) y c) para cada país, y compare como está cada país (consigo mismo) en b) y en c). Explique su resultado.
4. Considere una economía cerrada que puede ser representada por un individuo que vive dos períodos y cuyas preferencias están dadas por la siguiente función de utilidad:

$$U(c_1, c_2) = \log(c_1) + \beta \log(c_2) \quad (4)$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  representa el consumo del individuo en el período 1 y 2 respectivamente. El individuo cuenta con una dotación exógena de un único bien no perecible correspondiente a  $y_1$  en el período 1 e  $y_2$  en el período 2.

- Determine la restricción presupuestaria intertemporal y gráfiquela.
  - Encuentre las tasas de interés para las cuales el individuo ahorra en el primer período.
  - Suponga que la tasa de interés de la economía es  $r > \frac{y_2}{\beta y_1} - 1$ . ¿Qué ocurre con el ahorro y la cuenta corriente de esta economía, si el gobierno decide gastar  $G_1$  y  $G_2$  en el período 1 y 2 respectivamente? ¿Qué ocurre si el gobierno decide gastar sólo en el primer período?
  - Suponga que  $r = \frac{y_2}{\beta y_1} - 1$ . ¿Qué ocurre en este caso con el ahorro si el gobierno decide gastar  $G_1$  en el primer período?
5. **Equivalencia ricardiana e impuestos distorsionadores.** Considere una economía que existe por dos períodos. Los individuos en esta economía están dotados de  $y$  unidades de un bien almacenable en el período 1, y nada en el período 2. Si el bien es almacenado, el individuo recibe  $1 + \theta$  por cada unidad almacenada. La función de utilidad que maximiza el individuo representativo es:

$$U(c_1, c_2) = \frac{c_1^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \beta \frac{c_2^{1-\sigma}}{1-\sigma} \quad (5)$$

- ¿Cuál es la tasa de interés de equilibrio? Calcule el consumo en cada período y el ahorro. Si  $\sigma < 1$ , ¿qué pasa con el consumo en el período 1 y el ahorro cuando la tasa de interés sube? Suponga que esta es una economía abierta y  $\theta$  es la tasa de interés internacional. ¿Cuál es el saldo de la cuenta corriente en cada período?

- (b) Suponga que el gobierno financia en el período 1 un gasto de  $G$  con un impuesto de suma alzada  $T$  en el período 1 de modo que el presupuesto es equilibrado. Recalcule  $c_1$ ,  $c_2$  y el ahorro. Muestre que da lo mismo si el impuesto se cobra enteramente en el período 2, o sea se cumple la equivalencia ricardiana.
- (c) Suponga ahora que el gobierno decide hacer una rebaja de impuestos, dejando de cobrar los impuestos en el período 1. Sin embargo solo puede cobrar impuestos que distorsionan en el período 2. En consecuencia, el gobierno debe cobrar un impuesto proporcional a los intereses percibidos en el período 2, es decir el retorno de los ahorros será  $(1+\theta)(1-\tau)$ , donde  $\tau$  es la tasa de impuestos y debe ser tal que el presupuesto se equilibre. ¿Como son  $c_1$  y  $c_2$  en este caso? ¿Puede la rebaja de impuestos ser expansiva en el sentido de estimula el consumo? ¿Qué pasa con el ahorro privado y que debiera pasar si la equivalencia ricardiana se cumple? ¿Por qué no se cumple la equivalencia ricardiana?

6. **Ahorro y restricción de liquidez.** Considere un individuo que vive y consume durante tres períodos. En el primero estudia (aunque esta decisión no la analizaremos) o descansa. En el segundo período trabaja y percibe un ingreso  $e_{t+1}$  (individuo nacido en  $t$ ). En el tercer período es un jubilado. No hay crecimiento de la población y en cada período hay un individuo de cada generación. Los ingresos crecen a una tasa  $\gamma$ , esto es,  $e_t = (1 + \gamma) e_{t-1}$ . La economía es pequeña, abierta y enfrenta una tasa de interés internacional igual a  $r^*$ . La función de utilidad es:

$$U(c_{1t}, c_{2t+1}, c_{3t+2}) = \log(c_{1t}) + \beta \log(c_{2t+1}) + \beta^2 \log(c_{3t+2}) \quad (6)$$

- (a) Derive la trayectoria del consumo y del ahorro de cada individuo.
- (b) Suponga ahora que los jóvenes enfrentan la siguiente restricción de liquidez:

$$c_{1t} \leq \phi \frac{e_{t+1}}{1+r} \quad (7)$$

Interprete la restricción y derive qué valores debe tener  $\phi$  (acótelo) para que la restricción sea activa (con  $=$ ). Derive la trayectoria del consumo y del ahorro para un individuo que enfrenta restricciones de liquidez cuando joven.

- (c) Encuentre una expresión para el ahorro total como función de  $\phi$ . Cuáles son las predicciones de su análisis en una economía que liberaliza el mercado financiero, en particular, en lo que respecta a su impacto sobre el ahorro.

7. **Ahorro y Crecimiento.** considere una economía sin producción que enfrenta una tasa de interés  $r = 0$ . Los habitantes de esta economía viven tres períodos y cada generación es de tamaño unitario. Los jóvenes no pueden endeudarse y deben ahorrar o consumir su ingreso  $y_1$ . Los individuos de edad mediana tienen libre acceso al mercado financiero y tienen un ingreso de  $y_2$ . Los de la tercera edad tienen un ingreso  $y_3$  y pueden consumir además sus ahorros, si los tienen. La utilidad de los individuos es:

$$U(c_{1t}, c_{2t+1}, c_{3t+2}) = \log(c_{1t}) + \log(c_{2t+1}) + \log(c_{3t+2}) \quad (8)$$

o sea  $\beta = 1$ .

- (a) Suponga  $y_2 = (1 + \epsilon) y_1$  e  $y_3 = 0$ , donde  $\epsilon > 0$ . Calcule el ahorro de las tres generaciones como función de  $y_1$  y  $\epsilon$ .
- (b) Suponga que el ingreso crece a una tasa  $\gamma$ , donde  $y_{1t+1} = (1 + \gamma) y_{1t}$ . Calcule la tasa de ahorro, o sea el ahorro agregado como fracción del ingreso total ( $Y_t$ ).

- (c) Suponga que sube. ¿Cuál es el efecto sobre la tasa de ahorro? ¿Cómo cambia su respuesta si los jóvenes pueden pedir prestado contra ingresos futuros?

8. **Capital humano y crecimiento**<sup>1</sup>. Suponga una economía habitada por individuos que viven traslapadamente dos períodos (no hay crecimiento de la población). El individuo que nace en el período  $t$  tiene una capacidad  $H_t$ , heredada de sus padres. Cuando joven consume  $c_{t,t}$ , y tiene una unidad de tiempo para actividades distintas del ocio. El individuo puede estudiar una fracción  $h$  del tiempo y trabajar el resto igual a  $1 - h$  al salario  $w_t$  pagado a un individuo de capacidad  $H_t$ . En el período 2 tiene una capacidad  $H_t$  (no se olvida lo que sabe), aumentada en  $\delta h$ . Es decir, la capacidad en  $t + 1$  es:

$$H_{t+1} = (1 + \delta h) H_t \quad (9)$$

La función de producción en la economía es lineal en  $H$ :

$$Y_t = \sum_i H_i^t l^i \quad (10)$$

donde  $l$  para los jóvenes es  $1 - h$  (su oferta de trabajo) y para los adultos es 1 medida en términos de  $H_t$  ó  $1 + \delta h$  en términos de  $H_{t-1}$ . Note que padres e hijos tienen la misma capacidad (los hijos heredan el  $H$  de los padres), de modo que la producción se puede escribir como:

$$Y_t = H_t \sum l^i \quad (11)$$

- (a) Suponga que en equilibrio los jóvenes dedican  $h^*$  a estudiar, determine la tasa de crecimiento del producto y los salarios en la economía. Suponga que los individuos maximizan la siguiente utilidad:

$$U = \log(c_{t,t}) + \beta \log(c_{t,t+1}) \quad (12)$$

si el individuo puede ahorrar o pedir prestado a una tasa constante igual a  $r$  (esta es una economía pequeña y abierta así que  $r$  es dado) sus restricciones presupuestarias serán (usted podría derivar esto):

$$c_{t,t} = w_t(1 - h) + b_t \quad (13)$$

$$c_{t,t+1} + b_t(1 + r) = w_t(1 + \delta h) \quad (14)$$

- (b) Suponga que  $\delta > 1 + r$ . Determine el valor de  $h^*$  (note que la solución puede ser esquina), y del consumo en los dos períodos como función de  $w_t$ . Diga si el individuo ahorra o pide prestado y por qué. ¿A cuánto crece la economía? Suponga que el individuo ahora no puede ni ahorrar ni pedir prestado:  $b_t = 0$  para todo  $t$ .
- (c) Determine el valor óptimo de  $h$  y la tasa de crecimiento de la economía en el caso donde no hay mercado de crédito. Compare con (b).
- (d) Nosotros sabemos que el ahorro sube cuando la gente no puede pedir prestado. ¿Qué implica eso respecto del crecimiento? Ahora bien, basado además en los resultados de (b) y (c) explique cuáles son los efectos probables de restricciones al endeudamiento sobre el crecimiento económico.

---

<sup>1</sup> Nota: el enunciado es largo, pero las respuestas son simples y guiadas por el enunciado. Este problema está basado en "Borrowing Constraints, Human Capital Accumulation, and Growth" de José De Gregorio. Journal of Monetary Economics, 1996

## II. EJERCICIOS DE HORIZONTE INFINITO: RAMSEY

1. **Servicios públicos y derechos de propiedad en el modelo de Ramsey.** Actividades como infraestructura, generación de energía eléctrica, etc. pueden ser vistas que afectan la función de producción. Por otro lado, actividades que resguardan los derechos de propiedad como policía, defensa nacional o justicia pueden ser vistas que afectan la probabilidad que los agentes retengan la propiedad sobre sus bienes. Suponga que la probabilidad  $p$  de mantener la propiedad de producción que un agente produce es una función creciente del gasto de seguridad  $p(G)$  ( $p' > 0, p'' < 0$ ). Suponga además que el gasto se financia con un impuesto de suma alzada sobre la base de un presupuesto equilibrado. La función de utilidad del individuo consumidor-productor representativo (no hay progreso técnico ni crecimiento de la población) es:

$$U = \int_0^\infty \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} dt \quad (15)$$

Su restricción presupuestaria es:

$$p(G) f(k_t) = \dot{k}_t + c_t + \delta k_t + \tau \quad (16)$$

- (a) Explique la restricción presupuestaria.
  - (b) Resuelva el problema óptimo y descríballo en un diagrama de fase en  $c$  y  $k$ .
  - (c) Analice un aumento permanente y no anticipado de  $G$ . Describa la trayectoria de equilibrio y explique que pasa con el nivel de consumo y capital en el nuevo estado estacionario. ¿Sube o baja el consumo de estado estacionario? ¿y el capital?
  - (d) Suponga que el gobierno financia en un inicio el aumento del gasto con deuda pública, chuteando para adelante el aumento de impuestos. Sin usar álgebra conteste si su respuesta en la parte anterior cambia o no con este cambio en el método de financiamiento. Si el impuesto fuera a los ingresos  $((1-\tau)p(G)f(k_t))$  ¿cómo cambia su respuesta?
2. **Modelo de Ramsey con bienes transables y no transables.** Considere una economía abierta habitada por un individuo con horizonte infinito. El individuo consume dos tipos de bienes, no transables internacionalmente ( $c_N$ ) y transables ( $c_T$ ). Su función de utilidad está dada por:

$$U = \int_0^\infty \frac{[c_T(t)^\phi c_N(t)^{1-\phi}]^{1-\sigma}}{1-\sigma} e^{-\rho t} dt \quad (17)$$

Denote el consumo agregado como  $c(t)$  y corresponde a:

$$c(t) = c_T(t)^\phi c_N(t)^{1-\phi} \quad (18)$$

El individuo tiene ingresos y más pago de intereses  $r^*b$ , donde  $r^*$  es la tasa de interés internacional y  $b$  su stock de activos netos. El precio relativo de los bienes no transables respecto de los transables será denotado por  $q = P_N/P_T$ , y corresponde al tipo de cambio real. En consecuencia, la restricción presupuestaria instantánea del individuo será:

$$\dot{b} = y + r^*b - c_T - qc_N \quad (19)$$

- (a) Resuelva el problema de optimización del individuo, asumiendo que  $q$  cambia en el tiempo, y su tasa de cambio porcentual es  $\hat{q}$ . En particular, muestre la relación estática entre el consumo de bienes transables y no transables como función de  $q$  y los parámetros. Encuentre además la ecuación de Euler para la evolución del consumo como función de la tasa de interés internacional y otros parámetros del modelo.
- (b) Muestre en base a sus resultados, y explique por qué cuando el tipo de cambio real está apreciándose ( $\hat{q} > 0$ , o sea el precio relativo de los no transables respecto de los transables aumenta) el crecimiento sectorial es desbalanceado por cuanto el consumo de bienes transables crece más rápido que el de los bienes no transables.
- (c) Muestre además que cuando esta economía alcanza su estado estacionario, en el cual el consumo agregado  $c$  no crece, la tasa de interés real doméstica no se iguala con la tasa de interés internacional. Explique.
3. **Economía Cerrada con Impuestos.** Considere el modelo de Ramsey (economía cerrada sin costos de ajuste) incorporando un gobierno que fija un impuesto a los retornos del capital, de modo que si  $r$  denota la tasa de retorno del capital antes de impuestos, entonces la tasa neta de impuestos que recibirán los hogares será igual a  $(1 - \tau)r$ . Asuma también que el gobierno devuelve a los individuos lo que recauda con el impuesto mediante una transferencia a suma alzada igual a  $z$ . Denotando mediante  $a$  a los activos per cápita, tenemos que  $z = \tau r a$  y que, como se trata de una transferencia a suma alzada, los hogares no internalizan el hecho que  $z$  es igual a  $\tau r a$ .
- (a) En el modelo habitual la restricción presupuestaria es:

$$\dot{a} = w + (r - n)a - c \quad (20)$$

Modifique esta restricción para incorporar el impuesto y la transferencia.

- (b) Determine los valores de  $c$  y  $k$  de estado estacionario.
- (c) Compare el valor de  $c$  y  $k$  obtenidos con aquellos cuando no hay impuestos. Dé una intuición económica para las diferencias que encuentre.
- (d) Suponga que inicialmente  $\tau = 0$  y la economía se encuentra en el estado estacionario correspondiente, cuando de manera no anticipada y permanente el gobierno coloca un impuesto a los retornos al capital. Utilice un diagrama de fase en el plano  $(k, c)$  para trazar la trayectoria del consumo y el capital hacia el nuevo estado estacionario (suponga que  $c$  es la variable que puede saltar). Grafique también la evolución de  $c$  en función del tiempo.
- (e) Suponga ahora que en vez de aplicar los impuestos a los retornos al capital se aplica a los ingresos al trabajo ( $\tau w$  sería el pago de impuestos). Explique el por qué de sus resultados.
4. Considere una economía sin crecimiento de la población ni progreso técnico, donde un individuo que vive eternamente, tiene la siguiente función de utilidad Stone-Geary:

$$U(c) = \frac{(c - \bar{c})^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \quad (21)$$

donde  $\bar{c} \geq 0$  representa el consumo per cápita de subsistencia.

- (a) ¿Cuál es la elasticidad de sustitución intertemporal para esta función de utilidad? ¿Si  $\bar{c} > 0$ , cómo cambia la elasticidad cuando  $c$  aumenta?
- (b) Derive la ecuación de crecimiento del consumo y compare su resultado con el caso  $\bar{c} = 0$ . Dé una intuición para este resultado.

(c) Dado que la producción está dada por una tradicional Cobb-Douglas ( $y = ak^\alpha$ ), derive los valores de  $c$  y  $k$  de estado estacionario ( $c^*$  y  $k^*$ ) compárelos con el caso  $\bar{c} = 0$ .

5. **Tasa de ahorro en el modelo de Ramsey.** En este problema estudiaremos la evolución de la tasa de ahorro a medida que la economía se acerca al estado estacionario. También veremos por qué las tasas de ahorro pueden ser diferentes en el estado estacionario. Considere las dos ecuaciones diferenciales que caracterizan la dinámica del modelo de Ramsey:

$$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - c - (x + n + \delta)\hat{k} \quad (22)$$

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{\dot{c}}{c} + x = \frac{1}{\theta} \left[ f'(\hat{k}) - \delta - \rho - x\theta \right] \quad (23)$$

donde  $\hat{a} = ae^{-xt}$ ,  $x$  es la tasa de crecimiento de la productividad. Para lo que sigue supondremos que la función es Cobb-Douglas, es decir:

$$f(\hat{k}) = A\hat{k}^\alpha \quad (24)$$

A partir de esto responda:

- (a) ¿Cuál es la tasa de ahorro de la economía en el estado estacionario? Defina la tasa de ahorro como  $s^*$ . Dé una intuición económica de sus resultados.
- (b) Encuentre la expresión de  $\gamma_{\hat{z}}$ , donde  $\hat{z} = \hat{c}/f(\hat{k})$ . Usted debería llegar a la ecuación:

$$\gamma_{\hat{z}} = f'(\hat{k}) \left[ z - \frac{\theta - 1}{\theta} + \left( s^* - \frac{1}{\theta} \right) (\delta + \rho + x\theta) \right] \quad (25)$$

En lo que sigue haremos nuestro análisis en términos de la variable  $z$ , recuerde que la tasa de ahorro,  $s$ , es  $s = 1 - z$ .

- (c) Analice qué sucede con la variable  $z$  con respecto al tiempo cuando:

- i.  $s^* = \frac{1}{\theta}$
- ii.  $s^* > \frac{1}{\theta}$
- iii.  $s^* < \frac{1}{\theta}$

Para esto recuerde que todas las variables llegan al estado estacionario.

- (d) Finalmente diferencie la ecuación 25 respecto al tiempo y para cada uno de los siguientes casos, determine la evolución de la tasa de ahorro hacia el estado estacionario.

- i.  $s^* = \frac{1}{\theta}$
- ii.  $s^* > \frac{1}{\theta}$
- iii.  $s^* < \frac{1}{\theta}$