
Universidad de Chile

Ahorro Óptimo

Aux #1

Christopher Neilson

31 de julio de 2006

Neilson: Ahorro Óptimo, Aux #1

1

Outline

- Control Óptimo
 - Optimización Dinámica
 - Derivación CPO
 - Principio del Máximo de Pontriagyn
 - Hamiltoniano en Valor Corriente

- Modelo Ramsey-Cass-Koopmans
 - Motivación del Problema Dinámico
 - Ahorro Óptimo

- ▶ En economía asumimos que la mayoría de las decisiones se hacen a través de un proceso de optimización.
- ▶ Aquí se presentan los elementos básicos para resolver problemas de optimización dinámica en tiempo continuo.
- ▶ Esta clase auxiliar sigue el capítulo 14 DeGregorio (2006) y Barro Sala-i-Martin (2004). Ambos hacen un muy buen tratamiento de el tema.

El problema a resolver es:

$$\text{máx } V(0) \equiv \int_0^T v[k(t), c(t), t] dt \quad (1)$$

sujeto a:

$$\dot{k}(t) = g[k(t), c(t), t] \quad (2)$$

$$k(0) = k_0 \quad (3)$$

$$k(T) = k_T \quad (4)$$

La variable $k(t)$ es la **variable de estado**

La variable $c(t)$ es la **variable de control**.

La variable de estado es determinada por la elección del control y las condiciones iniciales.

Dado un valor de $k(t)$, una vez que se decide $c(t)$, estamos también determinando, vía (2), la evolución de $k(t)$ puesto que $c(t)$ y $k(t)$ determinan el cambio de k .

No es un Problema Estático

La presencia de variables de control y de estado es lo que hace a un problema dinámico esencialmente distinto de un problema estático.

No son una secuencia de problemas estáticos ya que **los períodos están ligados** a través de las decisiones que se toman en cada uno de ellos.

La decisión de $c(t)$ afectará al sistema en el futuro, de modo que **no solo afectará retornos corrientes, sino también los retornos futuros**.

¿Como podemos tomar esto en cuenta al escoger $c(t)$?

Se debe notar que la restricción dada por la ecuación 2, $\dot{k}(t)$, implica un continuo de restricciones, uno para cada momento $t \in [0, T]$.

Podemos entonces escribir este problema como un Lagrangiano de la siguiente manera:

$$\mathcal{L} = \int_0^T v[k(t), c(t), t] dt + \lambda \cdot [k_T - k(T)] + \int_0^T \{\mu(t) \cdot g[k(t), c(t), t] - \dot{k}(t)\}$$

$$\mathcal{L} = \int_0^T v[k(t), c(t), t] dt + \lambda \cdot [k_T - k(T)] + \int_0^T \{\mu(t) \cdot g[k(t), c(t), t] - \dot{k}(t)\}$$

- Donde λ es el multiplicador de lagrange estático.
- Donde $\mu(t)$ es el multiplicador de lagrange para cada momento t . Es conocido como el **multiplicador dinámico** o variable **co-estado**.

$$\mathcal{L} = \int_0^T v[k(t), c(t), t] dt + \lambda \cdot [k_T - k(T)] + \int_0^T \{\mu(t) \cdot g[k(t), c(t), t] - \dot{k}(t)\}$$

- Podríamos maximizar con respecto a $c(t)$ y $k(t)$.
- Pero no sabemos como calcular $\frac{\partial \dot{k}}{\partial k}$.
- Podemos integrar el termino $\int_0^T \mu(t) \dot{k}(t) dt$ por partes y de esta manera dejar el \mathcal{L} en términos de solo $k(t), c(t)$.

Lo primero a notar es que:

$$\frac{\partial \mu(t)k(t)}{\partial t} = \dot{\mu}(t)k(t) + \mu(t)\dot{k}(t)$$

Integrando y despejando tenemos

$$\int_0^T -\mu(t)\dot{k}(t) dt = -\mu(t)k(t) \Big|_0^T + \int_0^T k(t)\dot{\mu}(t) dt$$

Lo que nos deja el \mathcal{L} de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \int_0^T \left\{ v[k(t), c(t), t] + \mu(t)g[k(t), c(t), t] \right\} dt \\ & + k(T)\mu(T) - k(0)\mu(0) + \int_0^T \dot{\mu}(t)k(t)dt + \lambda[k(T) - k_T]\end{aligned}$$

- Donde el termino en llaves grandes es el llamado **Hamiltoniano**.
- Encontramos que el problema se reduce a $\mathcal{L} = \int \mathcal{H} + \text{algo}$

Sobre el Hamiltoniano:

$$\mathcal{H} = v[k(t), c(t), t] + \mu(t)g[k(t), c(t), t]$$

\mathcal{H} cambia al variar la variable de control $c(t)$ por dos motivos:

- El primero es directo a través de la función de utilidad.
- El segundo es indirecto y a través de la ecuación de movimiento, valorado en términos del precio sobre $\mu(t)$

Podemos mostrar que las CPO cr $c(t)$ y $k(t)$ son las siguientes:

$$\mathcal{L} = \int_0^T [\mathcal{H} + \dot{\mu}(t)k(t)] dt + k(T)\mu(T) - k(0)\mu(0) + \lambda[k(T) - k_T]$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c(t)} = 0 \quad \forall t \text{ es el Principio de Máximo.}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k(t)} + \mu'(t) = 0$$

$$\mu(T) = \lambda \Rightarrow \mu(T)(k(T) - k_T) = 0$$

Suponga que la función objetivo es la siguiente:

$$\int_0^T v[k(t), c(t), t] dt = \int_0^T e^{-\rho t} u[k(t), c(t)] dt$$

Podemos solucionar este problema con

$$\mathcal{H} = e^{-\rho t} u[k(t), c(t)] + \mu(t)g(k(t), c(t), t)$$

$$\mathcal{H} = e^{-\rho t} \left\{ u[k(t), c(t)] + q(t)g(k(t), c(t), t) \right\}$$

donde $q(t) = e^{\rho t} \mu(t)$ y definimos $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H}e^{\rho t}$ **Hamiltoniano en valor corriente.**

Podemos mostrar que las CPO para este problema son:

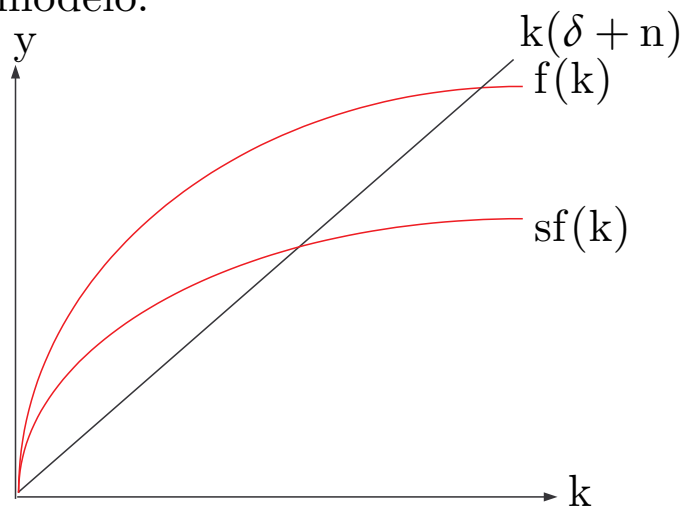
$$\frac{\partial \hat{\mathcal{H}}}{\partial c(t)} = 0$$

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{H}}}{\partial k(t)} = \frac{\partial e^{\rho t} H}{\partial k} = e^{\rho t} \dot{\mu} = \rho q - \dot{q}$$

$$e^{-\rho t} q(T)(k(T) - k_T) = 0$$

Modelo de Solow

Ahorro s clave para los resultados del modelo.



Pero fija e
exógena al
modelo....

Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

- ▶ Consumo y ahorro se determinan óptimamente por hogares que maximizan intertemporalmente.
- ▶ Firms y hogares interactuar en mercados competitivos.
- ▶ Encontramos que el ahorro es función del capital per capita.



Hogares

- ▶ La unidad básica es una familia que crece a una tasa n .
 \Rightarrow la población y la fuerza de trabajo crecen a una tasa n :
 $N_t = N_0 e^{nt}$.
- ▶ Cada familia(dinastía) maximiza su función de utilidad intertemporal:

$$U = \int_{t=0}^{\infty} u[c(t)] e^{(n-\rho)t} dt$$

Hogares

- Donde la función $u[c]$ es creciente y cóncava y además cumple con las condiciones de Inada:

$$\lim_{c \rightarrow 0} u'[c] = \infty \quad \lim_{c \rightarrow \infty} u'[c] = 0$$

- Cada persona provee una unidad de trabajo(sevicio laboral), a cambio de lo cual recibe un salario w .
- Llamaremos r_t a la tasa de interés real de mercado.
- La restricción presupuestaria que enfrentan las familias en cada período es:

$$w_t N_t + r_t A_t = C_t + \dot{A}_t \quad (5)$$

Hogares

- Dividiendo por N_t , tenemos que la restricción presupuestaria per capita es:

$$\dot{a}_t = w_t + r_t a_t - n a_t - c_t \quad (6)$$

- Se impone la condicion de **No Ponzi** que se cumple con igualad en equilibrio:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A_t e^{-rt} = 0 \quad (7)$$

Hogares

- El Hamiltoniano en valor presente es el siguiente:

$$\mathcal{H} = [u(c_t) + \lambda_t(w_t + (r_t - n)a_t - c_t)]e^{-(\rho-n)t} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a} = -\frac{d[\lambda e^{-(\rho-n)t}]}{dt} \quad (10)$$

Hogares

- Esto conduce a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} u'(c) &= \lambda \rightarrow \dot{\lambda} = u''[c]\dot{c} \\ \lambda(r-n) &= -(\dot{\lambda} - (\rho-n)\lambda) \\ u'(c)(r-n) &= -(u''[c]\dot{c} - (\rho-n)u'(c)) \end{aligned} \quad (11)$$

►

$$\frac{\dot{c}}{c} = -\frac{u'(c)}{u''(c)c}(r-\rho) \quad (12)$$

►

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t a_t e^{-(\rho-n)t} = 0 \quad (13)$$

Hogares



$$\frac{\dot{c}}{c} = -\frac{u'(c)}{u''(c)c}(r - \rho) \quad (14)$$



- Con $-\frac{u'(c)}{u''(c)c}$ la elasticidad de sustitución intertemporal $\sigma[c_t]$.
- Ecuación de Euler no entrega la trayectoria optima para el consumo dado r .

Hogares

- La ecuacion de euler encontrada nos dice el crecimiento del consumo pero no el nivel.
- Para el nivel debemos utilizar la ley de movimiento para la riqueza del hogar para derivar la restricción intertemporal y de ese modo fijar el nivel de consumo.
- Integrando

$$\dot{a}_t = w_t + r_t a_t - n a_t - c_t \quad \text{Notando que } \frac{\partial \dot{a}_t}{\partial t} = (r-n)a_t$$

- Podemos armar para integrar por partes...

Hogares

- Multiplicando ambos lados por $e^{-(\bar{r}_t - n)t}$ e integrando entre 0 y T, tendremos que la restricción es:

►

$$\int_0^T c_t e^{-(r_t - n)t} dt = a_0 + \int_0^T w_t e^{-(r_t - n)t} dt - a_T e^{-(r_t - n)T} \quad (15)$$

- Pero sabemos que de la euler que

$$\frac{\dot{c}}{c} = \sigma(r - \rho) \Rightarrow c(t) = c(0)e^{\sigma(r - \rho)t}$$

- Por lo tanto sabemos la trayectoria!

Firmas-Flash

- Se acumula capital de la manera usual:

$$\dot{k} = f(k) - c(t) - (n + \delta)k$$

- De la optimización de las firmas se encuentra que

$$f'(k) = r + \delta$$

- Lo que de la función de producción de la economía y dado el capital la tasa de interés queda fijada en

$$r = f'(k) - \delta$$

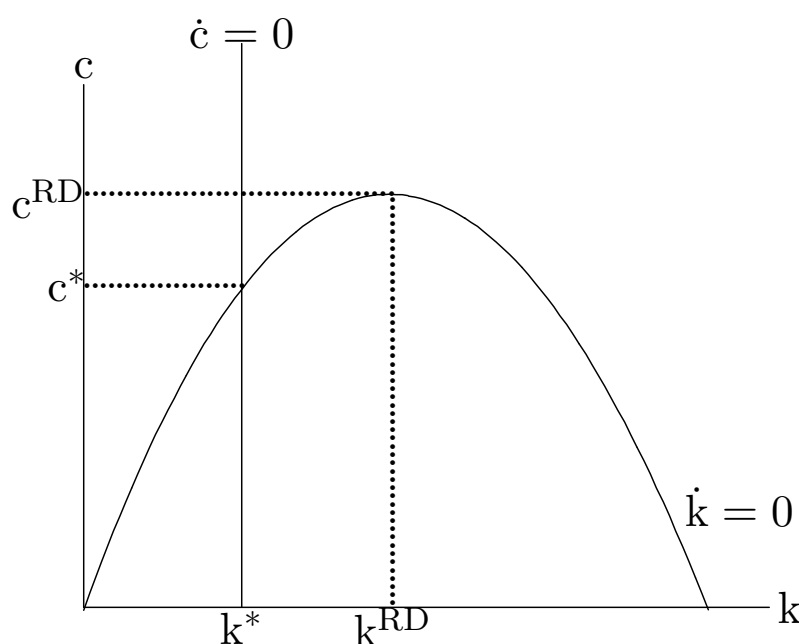
Equilibrio

► Tenemos dos ecuaciones diferenciales:

$$1.) \quad \frac{\dot{c}}{c} = \sigma(f'(k) - \delta - \rho)$$

$$2.) \quad \dot{k} = f(k) - c(t) - (n + \delta)k$$

Diagrama Fase



Equilibrio

► $\frac{\dot{c}}{c} = \sigma(f'(k) - \delta - \rho)$

Si $\dot{c} = 0 \Rightarrow f'(k) = \delta + \rho$ por lo que no depende del consumo. Solo hay un k que satisface esta condición.

Si el capital es muy alto, la productividad marginal es baja, la tasa de interes es baja y los hogares prefieren una trayectoria decreciente del consumo.

Si el capital es muy bajo, lo opuesto...

$$\dot{k} = f(k) - c(t) - (n + \delta)k$$

Equilibrio

Ahora $\dot{k} = f(k) - c(t) - (n + \delta)k$ Si
 $\dot{k} = 0 \Rightarrow f(k) = c(t) + (n + \delta)k.$

Derivando esto con respecto al capital tenemos
 $f'(k) - n - \delta$ Lo cual es la misma dinámica que en el modelo de Solow!

Si el consumo es muy alto, el capital baja.

Si el consumo es muy bajo, lo opuesto...

Diagrama Fase

