Economía de las Pensiones: Teoría Clásica

Pablo Castañeda
pcastaneda@safp.cl
Octubre 2006

1 Sheshinski y Weiss (1981)[1]

- Barro [1974][2] mostró que un Sistema de Pensiones Completamente Financiado (CF), esto es, uno en donde la recaudación periodica de contribuciones es invertida en el mercado de capitales, es un sustituto perfecto del ahorro privado. Por lo que un aumento forzoso de la tasa de contribución resultará en una reducción equivalente del ahorro privado. El consumo, las herencias y el ahorro agregado se verán inalterados. Por otra parte, un Sistema de Pensiones de Reparto (R), esto es, uno en donde las contribuciones de los trabajadores activos son utilizadas para pagar los beneficios de la población inactiva, es un sustituto perfecto de las herencias privadas, por lo que un aumento forzoso del la tasa de contribución resultará en una reducción equivalente de las herencias privadas. El consumo, el ahorro privado, y el ahorro agregado se verán inalterados.

Ejercicio Propuesto 1.1 *¿Cuáles son los principales supuestos en los que descansan los resultados obtenidos por Robert Barro?*

- El paper de Sheshinski y Weiss incorpora 2 nuevos elementos en el análisis: incertidumbre sobre el tiempo de sobrevida y la presencia de un mercado de rentas vitalicias actuarialmente justo.

- Su principal resultado es uno de equivalencia entre ambos formas de financiar un sistema de pensiones.

- Los autores también muestran que el impacto potencial del Sistema de Pensiones depende crucialmente de la existencia de un mercado de rentas vitalicias eficiente.

[1] Sheshinski, E. y Y. Weiss (1981): "Uncertainty and Optimal Social Security Systems," *Quarterly Journal of Economics* **96**(2), pp. 189-206.

[2] Barro, R.J. (1974): "Are Government Bonds Net Wealth," *Journal of Political Economy* **82**(6), pp. 1095-1117.

Observación 1.1 *El mercado de rentas vitalicias puede verse afectado si los individuos anticipan la asistencia social, y actuan en consecuencia, o simplemente no consideran la externalidad provocada por la intolerancia social a la pobreza. En cualquiera de estos casos, la contribución obligatoria es una solución al problema del "free-rider."*

1.1 El modelo

Considere una economía con las siguientes características:

- La vida del individuo representativo consiste de un periodo (laboralmente) activo de duración fija y un periodo de retiro de **duración incierta**.
- Los salarios son constantes.
- La utilidad de los individuos depende del consumo en cada periodo, del tiempo de sobrevida, y de la utilidad esperada de la generación siguiente.
- Cada generación puede afectar el bienestar de la siguiente generación por medio de herencias (preferencias por el bienestar de futuras generaciones).
- En este contexto, entenderemos por un Sistema de Pensiones óptimo uno que provea un nivel de pensiones tal que la utilidad del individuo representativo sea máxima. Dado que en el caso de un sistema CF no existen transferencias generacionales, su grado de optimalidad puede ser analizado desde el punto de vista de una generación cualquiera. En este caso, la teoría clásica sobre rentas vitalicias es aplicable (véase, e.g., Yaari [1965]).
- Un sistema de reparto involucra transferencias entre generaciones, por lo que el concepto de optimalidad debe considerar a beneficiarios y aportantes simultáneamente.

1.1.1 Sistema de Pensiones Completamente Financiado

- Sean c_0^i y c_1^i los flujos (discretos) de consumo del primer y segundo periodo de la generación i-ésima, respectivamente.
- Sea B^i el nivel de herencia per cápita dejada por la generación i a la generación $i+1$.
- La fracción efectiva de vida en el periodo de retiro es denotada por $\theta \in [0,1]$.
- Existen dos tipos de activos en la economía: una renta vitalicia a^i, que provee un pago cierto por la duración efectiva del periodo de retiro, y ahorros regulares s^i. La tasa de retorno del ahorro es constante R. Sin embargo, por la incertidumbre en el periodo de sobrevida la tasa de retorno de las rentas vitalicias es aleatoria. En un sistema CF *actuarialmente justo*, los beneficios esperados son equivalentes al valor presente del retorno del sistema de pensiones. Si suponemos que el 'aunamiento' ('pooling') de riesgos es factible, la tasa de retorno de las rentas vitalicias corresponde a $R/\bar{\theta}$, en donde $\bar{\theta}$ es el valor esperado de sobrevida del periodo de retiro de una generación cualquiera.

- La restricción de presupuesto de un invidivio representativo de la generación i está dada en consecuencia por:

$$c_0^i = w + B^{i-1} - a^i - s^i, \quad \text{y} \quad GB^i = Rs^i + [(R/\bar{\theta})a^i - c_1^i]\theta, \tag{1}$$

en donde w es el ingreso del primer periodo y G es el número de hijos de la generación i. Por simplicidad, supondremos que w, R, y G son constantes, y que B^{i-1} es conocido antes que cualquier decisión sea tomada por la generación i. Nótese que no hay re-inversión en el segundo periodo.

- Considerando planes de decisión óptimos por parte de futuras generaciones, se tiene que la utilidad indirecta de cada generación depende de la dotación inicial. Luego, es posble escribir la utilidad de la generación i como una función de su consumo y del nivel de herencia. Por simplicidad, supondremos la siguiente especificación:

$$V^i = u(c_0^i) + \mathbf{E}\left[v(c_1^i, \theta) + Gh(B^i)\right], \tag{2}$$

en donde $u(c_0^i)$ es la utilidad del primer periodo, $v(c_1^i, \theta)$ es la utilidad del segundo periodo, y $h(B^i)$ es la utilidad indirecta de la generación $i+1$. Estas funciones son invariantes en el tiempo y satisfacen, para cada θ, las usuales condiciones de monotonicidad y concavidad que garantizan la existencia de una solución única.

Observación 1.2 *Todas estas variables, excepto B^i, son seleccionadas por el individuo con antelación a la realización de θ; ecuación (1).*

- Las condiciones de primer orden (CPO) del problema de maximización descrito por la función objetivo (2) y las restricciones en (1), suponiendo la existencia de una solución interior, están dadas por

$$\frac{\partial V^i}{\partial s^i} = -u'(c_0^i) + R\mathbf{E}\left[h'(B^i)\right] = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial V^i}{\partial a^i} = -u'(c_0^i) + \frac{R}{\bar{\theta}}\mathbf{E}\left[\theta h'(B^i)\right] = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial V^i}{c_1^i} = \mathbf{E}\left[v_1(c_1^i, \theta) - \theta h'(B^i)\right] = 0, \tag{5}$$

en donde $v_1 = \partial v / \partial c_1$. Por la estructura del problema se tiene que la función objetivo es globalmente cóncava en s, a, y c_1, por lo que la solución del sistema (3)-(5) es única. Dicha solución será denotada por (s^{*i}, a^{*i}, c_1^{*i}), que son a su vez funciones de B^{i-1}. Reemplazando en la restricción de presupuesto (1) se obtienen a su vez las expresiones para c_0^{*i} y B^{*i}.

Proposición 1.1 *B^* es constante para cualquier realización de θ.*
Demostración. *Nótese que a partir de (3)-(4) se tiene que*

$$cov\left[\theta, h'(B^*)\right] = \mathbf{E}\left[\theta h'(B^*)\right] - \bar{\theta}\mathbf{E}\left[h'(B^*)\right] = 0.$$

Esto puede re-escribirse como

$$\int_0^1 \left(\theta - \bar{\theta}\right) h'((R/G)s^i + [(R/\bar{\theta})a^i - c_1^i]\theta/G)dP(\theta) = 0.$$

Luego, la única forma para que esta condición se cumpla es que, o bien B^* sea constante, o alternativamente, que $h'(\theta)dP(\theta)$ sea una medida de probabilidad. Sin embargo, dado que B es monótono en θ y que $h'' < 0$, esta segunda alternativa no es factible. ■

Este es un resultado conocido. Las rentas vitalicias permiten al individuo transferir consumo a través de los distintos estados de la naturaleza, por lo que resulta óptimo igualar la utilidad marginal de la herencia, $h'(B)$, en *cada* estado. ($h(B^*) \geq \mathbf{E}\left[h(B_0)\right]$, para cualquier juego justo)

Observación 1.3 *Utilizando el resultado de la Proposición 1.1, de la expresión en (1) se tiene que*

$$c_1^* = (R/\bar{\theta})a^{*i} \quad \text{y} \quad B^{*i} = (R/G)s^{*i}. \tag{6}$$

Esto es, la renta vitalicia es utilizada exclusivamente para financiar consumo durante la etapa de retiro, mientras que los ahorros son destinados a constituir herencia. [3]

1.1.2 Sistema de Pensiones de Reparto

- Un sistema de reparto involucra transferencias desde la población económicamente activa a la población inactiva o retirada. Sea a^{i-1} el impuesto cobrado a la generación i para financiar los beneficios de la generación $i-1$. Dado que hay G miembros jóvenes en la generación $i+1$, por cada miembro de la generación i, el beneficio (realizado) en el momento $i+1$ estará dado por $(Ga^i/\bar{\theta})\theta$, mientras que el impuesto pagado en i es de a^{i-1}. La restricción de presupuesto que enfrenta el individuo de la generación i corresponde en consecuencia a

$$c_0^i = w + B^{i-1} - a^{i-1} - s^i, \quad \text{y} \quad GB^i = Rs^i + \left[(Ga^i/\bar{\theta}) - c_1^i\right]\theta. \tag{7}$$

  Para determinar en nivel óptimo de pensiones en el momento i, el planificador central debe seleccionar el nivel de beneficios de la generación i, esto es, los impuestos que serán cargados a la generación $i+1$, para ser recibidos en $i+1$.

- El problema de maximización puede ser escrito de la siguiente forma:

$$\max_{(s^i, a^i, c_1^i)} \ u(c_0^i) + \mathbf{E}\left[v(c_1^i, \theta) + Gh(B^i - a^i)\right],$$

  sujeto a (7). Nótese que, dado un plan de decisiones óptimas para las futuras generaciones, la utilidad indirecta de la generaxción $i+1$ depende de las tranferencias

[3] Obviamente, si $h'(B) \equiv 0$, el portafolio del individuo estaría compuesto exclusivamente por rentas vitalicias; Yaari [1965].

netas de la generación i, $B^i - a^i$. Las CPO de este problema, suponiendo una solución interior, están dadas por:

$$\begin{aligned}
s^i &: -u'(c_0^i) + R\mathbf{E}\left[h'(B^i - a^i)\right] = 0 \\
a^i &: \mathbf{E}\left[h'(B^i - a^i)(\theta - \bar{\theta})\right] = 0 \\
c_1^i &: \mathbf{E}\left[v_1(c_1^i, \theta) - \theta h'(B^i - a^i)\right] = 0.
\end{aligned}$$

La solución de este sistema será denotada por $(\hat{s}^i, \hat{a}^i, \hat{c}_1^i)$, que son funciones de B^{i-1} y a^{i-1}. Al igual que en el caso anterior, la optimalidad del sistema de pensiones implica seguro completo (la condición viene dada por la segunda ecuación). De igual forma, se tiene que:

$$\hat{c}_1^i = (G/\bar{\theta})\hat{a}^i, \qquad \hat{B}^i = (R/G)\hat{s}^i.$$

1.1.3 Equivalencia entre ambos sistemas

Proposición 1.2 *Dadas iguales condiciones iniciales en ambos sistemas, esto es, B^{i-1} en un sistema financiado es equivalente a $B^{i-1} - a^{i-1}$ en un sistema de reparto, el consumo, el ahorro agregado y la utilidad son idénticas en ambos sistemas.*

Demostración. *Nótese que para las mismas condiciones iniciales ($\bar{B}$) se tiene que los sistemas de CPO son equivalentes:*

$$\begin{array}{ll}
-u'(c_0^{*i}) + R\mathbf{E}\left[h'(B^{*i})\right] = 0, & -u'(\hat{c}_0^i) + R\mathbf{E}\left[h'(\hat{B}^i - \hat{a}^i)\right] = 0, \\
\mathbf{E}\left[h'(B^{*i})\left(\theta - \bar{\theta}\right)\right] = 0, & \mathbf{E}\left[h'(\hat{B}^i - \hat{a}^i)(\theta - \bar{\theta})\right] = 0, \\
\mathbf{E}\left[v_1(c_1^{*i}, \theta) - \theta h'(B^{*i})\right] = 0, & \mathbf{E}\left[v_1(\hat{c}_1^i, \theta) - \theta h'(\hat{B}^i - \hat{a}^i)\right] = 0.
\end{array}$$

Luego, reemplazando en las restricciones de presupuesto se tiene que

$$c_0^{*i} = \hat{c}_0^i, \quad s^{*i} + a^{*i} = \hat{s}^i, \quad c_1^{*i} = \hat{c}_1^i, \quad a^{*i} = (G/R)\hat{a}^i, \quad y \quad B^{*i} = \hat{B}^i - \hat{a}^i.$$

$$\begin{aligned}
c_0^{*i} &= w + \bar{B} - (s^{*i} + a^{*i}), \;\; \hat{c}_0^i = w + \bar{B} - \hat{s}^i \\
B^{*i} &= (R/G)s^{*i}, \;\; \hat{B}^i = (R/G)\hat{s}^i \\
c_1^{*i} &= (R/\bar{\theta})a^{*i}, \;\; \hat{c}_1^i = (G/\bar{\theta})\hat{a}^i \\
s^{*i} + a^{*i} &= \hat{s}^i, \;\; \hat{B}^i = (R/G)\left(s^{*i} + a^{*i}\right)
\end{aligned}$$

■

- Cuando $R > G$, la contribución óptima será mayor en el sistema de reparto, sin embargo, las herencias son ajustadas de forma que las trasferencias netas se mantengan inalteradas.

1.1.4 Estática Comparada

- En lo que sigue, supondremos que tanto w como R se mantienen constantes; esto es, consideraremos un análisis de equilibrio parcial. Adicionalmente, supondremos que las dotaciones iniciales en cada sistema ($w + B^{i-1}$ y $w + B^{i-1} - a^{i-1}$, respectivamente) se mantienen constantes. Por simplicidad nos enfocarémos en el caso de un sistema financiado.

Ejercicio Propuesto 1.2 *Derive analíticamente las condiciones que permitan analizar, por medio de un ejercicio de estática comparada, los efectos que tendría sobre las variables de control de interés un aumento de la esperanza de vida, $\bar{\theta}$.*

- Siguiendo pasos análogos a los requeridos para solucionar el Ejercicio Propuesto 1.2, para el caso de una **disminución de la tasa de fertilidad** se tiene que la disminución del número de hijos (G) provoca una disminución de las herencias y por tanto del ahorro en el agregado: $ds^*/dG > 0$;

  Las herencias per cápita aumentarán, sin embargo, así como el consumo en la etapa de retiro y las pensiones óptimas: $dB^*/dG < 0$ y $dc_1^*/dG < 0$.

  En relación a a^* y s^*, estos se mueven en direcciones opuestas, aunque la suma de ambas decrece, $d(a^* + s^*)/dG > 0$. En particular, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{ds^*}{dG} &= -\frac{Rs^*}{\Delta G^2}\left(\bar{\theta}u''h'' - \frac{R}{\bar{\theta}}\mathbf{E}\left[v_{11}\right]\left(u'' - Rh''\right)\right) > 0 \\
\frac{dc_1^*}{dG} &= \frac{R}{\bar{\theta}}\frac{da^*}{dG} = \frac{R^2 s^*}{\Delta G^2}h''u'' < 0 \\
\frac{dB^*}{dG} &= \frac{R^2 s^*}{\Delta G^2 \bar{\theta}}u''\mathbf{E}\left[v_{11}\right] < 0 \\
\frac{d(a^* + s^*)}{dG} &= \frac{R^2 s^*}{\Delta G^2 \bar{\theta}}\mathbf{E}\left[v_{11}\right]\left(u'' - Rh''\right) > 0.
\end{aligned}
$$

1.1.5 Imperfecciones en el mercado de rentas vitalicias

Cuando existen restricciones en el mercado de rentas vitalicias la posibilidad de un seguro perfecto se extingue. Luego, las herencias se vuelven aleatorias y la definición de estado estacionario involucra la caracterización de una distribución estable.

1.2 Conclusiones

- El artículo muestra que bajo un sistema de pensiones CF, actuarialmente justo, el individuo representativo prefiere cubrir completamente la incertidumbre asociada a su sobrevida. Esto permite que el individuo iguale las utilidades marginales de herencia en cada estado de la naturaleza.

- De lo anterior resulta que, en el óptimo, el ahorro privado es destinado exclusivamente al motivo de herencia, mientras que las rentas vitalicias financian el consumo. El mismo patrón ocurre en un sistema de reparto.

- La solución es equivalente entre ambas formas de financiamiento, en términos del consumo, ahorro, y variables de control apropiadamente definidas.
- De los ejercicios de estática comparada se tiene que una disminución de la tasa de natalidad resulta en que el nivel de herencias, el ahorro privado y agregado disminuyen, mientras que el nivel de pensiones (per cápita) aumenta.

2 Abel (1985)[4]

- El autor desarrolla un modelo que estudia las implicancias de la incertidumbre asociada al tiempo de sobrevida sobre el consumo agregado y la accumulación de capital.

- En el modelo las herencias ocurren por mero accidente. La situación que se representa difiere dramáticamente de la de Sheshinski y Weiss [1981], en donde se asume que los individuos tienen preferencias por la utilidad de sus descendientes y en donde los individuos de una cohorte fallecen en la **misma** fecha.

2.1 El modelo

- Considere una economía poblada por numerosos individuos, en donde existe un único bien de consumo, que puede ser consumido o ahorrado.

- Por cada unidad del bien de consumo ahorrado el individuo obtiene $R \geq 0$ unidades del bien en el periodo siguiente.

- Cada individuo vive por 1 o 2 periodos.

- Durante el primer periodo cada individuo recibe un ingreso de Y. En el primer periodo consume un monto c_1 y paga impuestos (de suma alzada) por un monto de T. Al final del primer periodo el individuo tiene $G \geq 1$ hijos.

- Una fracción p de los individuos muere al final del primer periodo. Los individuos que sobreviven el primer periodo reciben una pensión de S y consumen un monto c_2. La riqueza no consumida es heredada en partes iguales por los herederos.

- Cada individuo selecciona c_1 y c_2 para maximizar la siguiente función de utilidad

$$U(c_1) + (1-p)\delta U(c_2),$$

  en donde $\delta \in (0,1]$. De acuerdo a la función de utilidad, los individuos no obtienen utilidad por dejar herencias.

- La heterogeneidad del modelo proviene de la **historia de mortalidad** de cada "dinastía."

- Denotaremos por B la herencia recibida por un individuo al minuto de nacer. La determinación de esta cantidad será discutida más adelante.

- La riqueza mantenida por un individuo **al final del primer periodo** está dada por

$$W = B + Y - T - c_1. \tag{8}$$

[4] Abel, A.B. (1985): "Precautionary Savings and Accidental Bequest," *American Economic Review* **75**(4), pp. 777-791.

Si el individuo muere, cada uno de los herederos recibe RW/G al comienzo del periodo siguiente. Por otra parte, si el indivivuo sobrevive, éste consume $c_2 = RW + S$, debido a que no recibe utilidad por dejar herencia.

- El consumo en el segundo periodo está dado en consecuencia por

$$c_2 = R\left[B + Y - T - c_1\right] + S. \tag{9}$$

- El consumo del primer periodo se obtiene de las CPO (suponiendo la existencia de una solución interior), de donde se tiene que

$$U'(c_1) = (1-p)R\delta U'(c_2).$$

- Por simplicidad, consideraremos un índice de utilidad del tipo[5]

$$U(c) = \frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{\beta c}{1-\gamma} + \eta\right)^{\gamma}.$$

Bajo esta forma funcional se tiene que el consumo óptimo del primer período puede ser expresado como una función lineal del valor presente de la riqueza

$$c_1 = a(B + Y - T + R^{-1}S) + b, \quad 0 < a < 1, \tag{10}$$

en donde

$$\begin{aligned} a &= \left[1 + R^{-1}\left[(1-p)R\delta\right]^{1/(1-\gamma)}\right]^{-1} \\ b &= \left((1-\gamma)\,\eta/\beta\right) aR^{-1}\left[1 - (1-p)\,R\delta\right]^{1/(1-\gamma)}. \end{aligned}$$

- Nótese que a es la propensión marginal a consumir en el primer periodo. Si $U(c)$ posee un coeficiente de aversión relativa al riesgo constante ($\eta = 0$), se tiene que $b = 0$, por lo que c_1 **es proporcional** al valor presente del ingreso disponible.

- Sea $\sigma = (1-\gamma)$ el coeficiente constante de aversión relativa al riesgo y note que si $R = \delta = 1$, entonces la fracción total del ingreso disponible $(B + Y - T + S)$ consumida en el primer periodo es $a = [1 - (1-p)^{1/\sigma}]^{-1}$. Mientras mayor mayor sea σ menor será la fracción del ingreso disponible que el individuo consumirá en el primer periodo. En el límite, cuando $\sigma \to \infty$, el individuo consume la mitad de su ingreso disponible en el primer periodo. Por el contrario, cuando $\sigma \to 0$ el individuo consume todo su ingreso en el primer periodo (suponiendo que puede pedir prestado S).[6]

- Usando la función de consumo (10) podemos calcular la expresiones correspondientes a la riqueza que resulta **al final del primer periodo** y el consumo en el segundo periodo [ecuaciones (8), (10) y (9)]

$$\begin{aligned} W &= (1-a)\,(B + Y - T) - aR^{-1}S - b \\ c_2 &= \left[(1-a)\,c_1 - b\right] R/a. \end{aligned} \tag{11}$$

[5] Nótese que $-c\frac{U''(c)}{U'(c)} = \frac{(1-\gamma)c\beta}{\beta c + (1-\gamma)\eta}$.

[6] En este último caso, se requiere que el ingreso futuro pueda ser utilizado como colateral.

2.1.1 Transferencias Generacionales

- La herencia recibida por un individuo depende de la mortalidad histórica de su correspondiente *dinastía*. En particular, denotaremos por j el número de generaciones que fallecieron consecutivamente a finales de primer periodo (esto es, $j = 0$ corresponde a un padre que vivió 2 periodos y no dejó herencia, $j = 1$ corresponde a un padre que murió en el periodo 1 y dejó herencia, etc.). Cada individuo es indexado por j. Nótese que $p^j(1-p)$ es la fracción de invididuos de tipo j.

- Considere primero a los individuos de tipo-0, cuyos padres vivieron por dos periodos no dejando herencia, $B^{(0)} = 0$. El consumo y la riqueza al final del primer periodo corresponden respectivamente a las expresiones

$$c_1^{(0)} = a(Y - T + R^{-1}S) + b \tag{12}$$
$$W^{(0)} = (1-a)(Y-T) - aR^{-1}S - b. \tag{13}$$

- Considere ahora invididuos del tipo $j \geq 1$. Dado que todos los invididuos tienen la **misma propensidad a consumir**, las diferencias en consumo son proporcionales a las diferencias en las herencias recibidas. En particular, el consumo de un invididuo de tipo-j excede el de un individuo de tipo-0 por $aB^{(j)}$,

$$c_1^{(j)} = aB^{(j)} + c_1^{(0)}. \tag{14}$$

  Similarmente, diferencias de riqueza intra-cohorte, **al final del primer periodo**, están dadas por

$$W^{(j)} = (1-a)B^{(j)} + W^{(0)}. \tag{15}$$

- Habiendo relacionado la riqueza al final del primer periodo, a continuación determinaremos el valor de $B^{(j)}$. Si un individuo de tipo-$j-1$ fallece después del periodo 1, éste deja una herencia de $G^{-1}W^{(j-1)}$ a sus hijos (que serán a su vez de tipo-j). Dicha herencia obtandrá un retorno de R, de manera que el monto de la herencia recibida por sus herederos estará dado por

$$B^{(j)} = (R/G)W^{(j-1)}, \qquad j = 1, 2, \ldots \tag{16}$$

  Combinando estas ecuaciones se tiene $W^{(j)} = (1-a)(R/G)W^{(j-1)} + W^{(0)}$, se tiene:

$$W^{(j)} = W^{(0)} \sum_{i=0}^{j} (1-a)^i (R/G)^i, \qquad j = 0, 1, \ldots \tag{17}$$

  Suponiendo que $(1-a)R < G$, la suma converge (al fijar $j = \infty$) a $W^{(0)}/[1-(1-a)(R/G)]$.

- Con esto se concluye el desarrollo analítico del modelo. Para cualquier j, se tiene que una fracción $(1-p)p^j$ de la población es de tipo-j. Luego, utilizando las ecuaciones (12)-(13), (16) y (17) es posible calcular el consumo, la riqueza y la herencia recibida al nacimiento para cada individuo tipo-j.

- Para el caso de la distribución de las variables agregadas (en términos per cápita de la generación joven), tenemos que [de la ecuación (15)]

$$W^* = (1-a)B^* + W^{(0)}. \tag{18}$$

Adicionalmente, dado que pW^* de la riqueza es destinada a herencias, se tiene la siguiente relación entre B^* y W^*

$$B^* = p(R/G)W^*, \tag{19}$$

de donde se tiene que [combinando (18) y (19)]

$$W^* = W^{(0)}/(1-(1-a)pR/G).$$

Esto es, que la riqueza per cápita **es proporcional** a $W^{(0)}$.

- El consumo *agregado*[7] per cápita equivale al ingreso disponible, $Y - T$, más las pensiones pagadas a los sobrevivientes de la generación anterior, $(1-p)G^{-1}S$, más los retornos obtenidos por las herencias [ecuaciones (8) y (19)],[8]

$$C_1^* + C_2^* = Y - T + (R/G - 1)W^* + (1-p)G^{-1}S. \tag{20}$$

Finalmente, utilizando (11) y recordando que la generación anterior tiene $(1-p)G^{-1}$ veces la población joven de la actual generación, se tiene que

$$C_2^* = (1-p)G^{-1}\left[(1-a)C_1^* - b\right] R/a, \tag{21}$$

de manera que C_1^* y C_2^* se mueven **en la misma dirección** frente a cambios en Y o T.

2.1.2 Introducción de un Sistema de Pensiones Financiado Actuarialmente Justo de Beneficio Definido

- Un sistema de pensiones financiado de Beneficio Definido (BD) satisface la condición $RT = (1-p)S$ (en uno de reparto se tendría que $GT = (1-p)S$).

- A continuación analizamos los efectos sobre consumo y capital. La estrategia consiste en analizar los efectos sobre los individuos tipo-0, para luego analizar los efectos sobre $W^{(0)}$ y el stock de capital (que es proporcional a $W^{(0)}$), y finalmente, los efectos que el stock de capital tiene sobre C_1^* y C_2^*.

[7] Nótese que el consumo agregado per cápita de los adultos mayores puede ser directamente calculado como $C_2^* = (1-p)G^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}(1-p)p^j c_2^{(j)}$.

[8] Nótese que de (8) tenemos que $C_1^* = B^* + Y - T - W^*$, mientras que de (19) tenemos que $B^* - W^* = -(1-pR/G)W^*$; esto es, $C_1^* = Y - T - (1-pR/G)W^*$. Dado que $C_2^* = (1-p)G^{-1}(RW^* + S)$, se tiene (20)

- Primero, podemos sustituir la condición $RT = (1-p)S$ en las ecuaciones (12) y (13) para obtener

$$c_1^{(0)} = aY + b + apR^{-1}S \quad \text{y} \quad W^{(0)} = (1-a)Y - b - T - apR^{-1}S. \tag{22}$$

  La introducción de un sistema actuarialmente justo incrementa por tanto el valor presente de la restricción presupuestaria por un monto de $R^{-1}S - T = apR^{-1}S > 0$. Esto se debe a que el retorno del sistema es superior a R (por el efecto de la mortalidad). Con esto se obtiene un incremento en $c_1^{(0)}$. En relación a $W^{(0)}$, ésta se ve reducida, sin embargo, por dos razones: primero, el ingreso disponible cae por un monto de T, y segundo, por el incremento de consumo en el primer periodo.

- En el caso del stock de capital agregado al final del primer periodo, esta vez T es parte del stock (sistema financiado). La versión agregada de (8) nos entrega

$$W^* + T = Y + B^* - C_1^*,$$

  luego, de la versión agregada de la ecuación (14) se obtiene

$$C_1^* = aB^* + c_1^{(0)}. \tag{23}$$

  Combinando estas dos ecuaciones resulta

$$W^* + T = Y + (1-a)B^* - c_1^{(0)}.$$

  Dado que la introducción del sistema de de pensiones financiado causa un incremento en $c_1^{(0)}$ y una disminución de $B^* = p(R/G)W^*$ [W^* es proporcional a $W^{(0)}$], es claro que **el stock de capital disminuye**.

- Para considerar el efecto sobre el consumo agregado, basta con reemplazar en (20) la condición $RT = (1-p)S$, de donde se obtiene

$$C_1^* + C_2^* = Y + ((R/G) - 1)(W^* + T).$$

  Luego, el consumo agregado es igual a la suma del ingreso laboral y el retorno neto (ajustado por el crecimiento de la población) de la riqueza agregada.

- En el caso en que $R = G$ (sistema de reparto), el consumo agregado per cápita es independiente del nivel de beneficios del sistema de pensiones. Adicionalmente, dado que C_1^* y C_2^* se mueven en la misma dirección frente a cambios en Y y T, C_1^* y C_2^*, por separado, son independientes del nivel de beneficios cuando $R = G$.

Ejercicio Propuesto 2.1 *Explique en detalle los efectos sobre C_1^* y C_2^* que resulta cuando $R > G$.*

- **¿Qué ocurre con la distribución del consumo y la riqueza en cada cohorte?**

  De acuerdo a la ecuación (22), el consumo de los individuos tipo-0 se incrementa en $apR^{-1}S$ por la introducción del sistema de pensiones, mientras que $W^{(0)}$ cae en $T + apR^{-1}S$. La reducción en $W^{(0)}$ conlleva una disminución en $B^{(1)}$, y de hecho, en $B^{(j)}$, para todo $j = 1, 2, 3, \ldots$, lo que sigue de las expresiones en (16) y (17), que muestran que $B^{(j)}$ es proporcional a $W^{(0)}$.

  En relación al consumo, la desviación de consumo de un individuo tipo-j, en relación al promedio, es proporcional a $B^{(j)} - B^*$ [ecuaciones (14) y (23)],

$$c_1^{(j)} - C_1^* = a\left(B^{(j)} - B^*\right).$$

  Dado que $B^{(j)}$ y B^* son proporcionales a $W^{(0)}$, se tiene que $c_1^{(j)} - C_1^*$ también es proporcional a $W^{(0)}$. Dado que la introducción del sistema de pensions reduce $W^{(0)}$, esto reduce la magnitud de las diferencias con respecto al promedio de consumo en el primer periodo. En el caso del consumo en el segundo periodo, basta con considerar (11), para concluir que la menor dispersión en $c_1^{(j)}$, disminuye la dispersión en $c_2^{(j)}$. Esto es el resultado de la introdución de una suerte de póliza de seguro única contra el riesgo de sobrevida.

  Como discutimos anteriormente, en el caso en que $R = G$, los consumos agregados no sufren variación, sin embargo, la introducción del sistema de pensiones disminuye la variabilidad del consumo en cada cohorte, por lo que un sistema de pensiones aumenta el bienestar. En el caso en que $R < G$, el sistema de pensiones incrementa el consumo y su varianza. Finalmente, en el caso en que $R > G$, se produce una disminución en el consumo, pero una disminución de su variabilidad.

2.1.3 Rentas Vitalicias Privadas

- En la sección anterior supusimos que no existía un mercado de rentas vitalicias. Para dicho caso concluimos que la introducción de un sistema de pensiones actuarialmente justo reduce el nivel de capital. Sin embargo, si existiese un mercado de rentas vitalicias, la introducción de un sistema de pensiones no tendría efecto, ya que los individuos podrían "deshacer" los efectos del sistema de pensiones vía transacciones de mercado.

Ejercicio 2.1 *¿Qué efectos tendría la introducción de un sistema de rentas vitalicias? ¿Si ud. fuera dueño de una compañía de seguros de vida, le re-compraría la renta vitalicia a uno de sus asegurados?*

3 Abel (1986)[9]

- Shesinski y Weiss [1981] y Abel [1985] mostraron que la presencia de un mercado de rentas vitalicias vuelve los efectos de un sistema de reparto irrelevantes, ya que los individuos pueden (en teoría) deshacer cualquier imposición del sistema de reparto por medio de transacciones en este mercado.

- El presente artículo considera una situación en donde los individuos tienen información privada respecto a sus respectivas probabilidades de mortalidad. En dicho caso, la instauración de un sistema de pensiones tiene efectos reales. El resultado del autor descanza en la obligatoriedad del sistema.

3.1 El modelo

- Considere un individuo que puede vivir 1 periodo con probabilidad $p > 0$, o dos periodos con probabilidad $1-p > 0$. Sea I la riqueza inicial del individuo al comienzo de su vida, cuya determinación será discutida más abajo.

- Durante el primer periodo de vida el individuo recibe un ingreso de Y, paga una contribución de T a un sistema de pensiones financiado, y consume un monto c_1. Supondremos que $I + Y - T > 0$.

- Al final del primer periodo, el individuo elije una combinación de bonos y rentas vitalicias. Sea Q el monto de rentas vitalicias. El ingreso restante, $I + Y - T - c_1 - Q$, es invertido en bonos libres de riesgo. Las rentas vitalicias tienen un retorno de A para un individuo que sobrevive y de cero en caso contrario. Un bono libre de riesgo tiene un retorno de R que es recibido por el individuo o sus herederos.

- Al comienzo del segundo periodo nacen los hijos del individuo y la incertidumbre es revelada. Si el individuo muere al comienzo del segundo periodo sus herederos reciben

$$B^D = (I + Y - T - c_1 - Q)\, R. \tag{24}$$

  Alternativamente, si el individuo sobrevive hasta el final del periodo sus herederos reciben una herencia de

$$B^S = (I + Y - T - c_1 - Q)\, R + QA + S - c_2. \tag{25}$$

  Las herencias son recibidas al comienzo del segundo periodo, que corresponde al comienzo del primer periodo de los herederos.

- Las preferencias del individuo son representadas por el índice de utilidad esperada de la forma

$$U(c_1) + p\delta V\left(B^D\right) + (1-p)\,\delta U\,(c_2) + (1-p)\,\delta V\left(B^S\right), \tag{26}$$

[9] Abel, A.B. (1986): "Capital Accumulation and Uncertain Lifetimes with Adverse Selection," *Econometrica* **54**(5), pp. 1079-1097.

en donde $\delta \in (0,1]$ es el factor de descuento, mientras que $U(\cdot)$ y $V(\cdot)$ son funciones crecientes y estrictamente cóncavas que dependen del consumo y del nivel de herencias, respectivamente.

- El problema del individuo consiste en maximizar (26), sujeto a la restricción de presupuesto [que resulta de combinar (24) y (25) para eliminar Q como variable de decisión]:

$$B^S = A(I+Y-T) + S - Ac_1 - c_2 - \left(\frac{A-R}{R}\right) B^D.$$

De las CPO se tiene

$$\begin{aligned} c_1 &: U'(c_1) = (1-p)\delta A V'(B^S) \\ c_2 &: U'(c_2) = V'(B^S) \\ B^D &: pV'(B^D) = (1-p)\frac{A-R}{R}V'(B^S). \end{aligned} \tag{27}$$

Proposición 3.1 *Si el mercado de rentas vitalicias es actuarialmente justo, el consumo en el segundo periodo es financiado por rentas vitalicias, y las herencias con ahorro.*
Demostración. *Un sistema es actuarialmente justo si $(1-p)A = R$, de donde se tiene que $(A-R)/R = p/(1-p)$. Reemplazando esta condición en (27) se obtiene $B^{*D} = B^{*S}$. Asimismo, de combinar (24) y (25) se tiene*

$$B^S = B^D + QA + S - c_2,$$

de manera que el consumo en el segundo periodo, $c_2^* = QA + S$, es financiado por rentas vitalicias (provistas privada y públicamente). Luego, el ahorro es completamente destinado a las transferencias intergeneracionales. ■

Corollary 3.1 *Si $A < R/(1-p)$, entonces se tiene que $B^{*D} > B^{*S}$ y $c_2^* > QA + S$.*

- A objeto de obtener una solución analítica, en lo que sigue supondremos que, con $\sigma > 0$ y $\lambda \geq 0$,

$$\begin{aligned} U(c) &= (c^{1-\sigma} - 1)/(1-\sigma) \\ V(B) &= \lambda(B^{1-\sigma} - 1)/(1-\sigma). \end{aligned}$$

Luego, los valores óptimos de c_2, B^D, B^S, así como la demanda de consumo contingente en el segundo periodo, $QA + S$, son proporcionales al valor presente esperado de los recursos disponibles, $I + Y - T + A^{-1}S$. En particular, es posible mostrar que

$$\begin{aligned} c_1(p,A) &= \phi(p,A)\left(I+Y-T+A^{-1}S\right), \quad & 0 < \phi(p,A) < 1, \\ Q(p,A) + A^{-1}S &= q_1(p,A)\left(I+Y-T+A^{-1}S\right), \quad & q_1(p,A) < 1. \end{aligned} \tag{28}$$

Asimismo, se tiene que $\partial q_1(p,A)/\partial p < 0$, mientras que $q_1(p,A)$ será positivo, si y solo si,

$$A > \frac{R}{1-p}\left[(1-p) + p\left(\frac{\lambda^{(1/\sigma)}}{1+\lambda^{(1/\sigma)}}\right)^{\sigma}\right] \geq 0. \tag{29}$$

Si $S = 0$, la condición en (29) es necesaria y suficiente para garantizar una demanda positiva por rentas vitalicias. Bajo la condición de "actuarialidad justa," $(1-p)A = R$, esta condición es satisfecha.

Podemos escribir (28) de la siguiente forma:

$$Q(p,A) = q_1(p,A)\,(I + Y - T) - q_2(p,A)S, \qquad q_2(p,A) = [1 - q_1(p,A)]A^{-1}.$$

Dado que $q_1 < 1$ y $\partial q_1/\partial p < 0$, se tiene que $q_2(p,A) > 0$ y que $\partial q_2/\partial p > 0$. Luego, si $I + Y - T > 0$ y $S \geq 0$, se tiene que

$$\frac{\partial Q(p,A)}{\partial p} < 0.$$

3.2 Equilibrio en el mercado de rentas vitalicias

- Suponga ahora que los individuos son caracterizados por diferentes probabilidades de fallecer. Sea $H(p)$ la fracción de individuos jóvenes cuya probabilidad de fallecer es menor a p. El dominio de $H(p)$ está dado por $[p^L, p^H]$, en donde $0 < p^L < p^H < 1$. Los valores de p están restringidos por la condición

$$\frac{\lambda}{(1-p^H)(1+\lambda^{(1/\sigma)})^{\sigma} + p^H\lambda}p^H < p^L < p^H,$$

  que garantiza la condición (29).

- Adicionalmente, consideraremos el caso en que la probabilidad de fallecer es independiente de la del padre. Asimismo, cada individuo conoce el valor de su propio p, pero la compañía de seguros o el gobierno son incapaces de determinar en valor de p para un individuo en particular.

- Una fracción p de cada cohorte de tipo-p fallecerá al final del primer periodo.

- Las compañías no pueden determinar si un individuo posee rentas vitalicias de otra compañía, por lo que el único equilibrio posible es uno del tipo "aunador" (i.e., 'pooling equilibrium,' esto porque un 'equilibrio separador' requeriría restringir el número de pólizas ofrecidas a cada individuo).

- Suponiendo que las compañías son neutrales al riesgo, sus utilidades debiesen ser iguales a cero. Sea $M(p,A)$ la utilidad esperada de la compañía con una tasa de retorno de A por pólizas emitidas a individuos tipo-p. Luego,

$$M(p,A) = R - (1-p)A \tag{30}$$

de manera que $\partial M/\partial p = A > 0$. Es evidente que la tasa de retorno de las rentas vitalicias A debe estar contenida entre los valores $R/(1-p^L)$ y $R/(1-p^H)$.

- A continuación mostramos que A debe ser inferior a $\bar{A} = R/(1-\bar{p})$, con

$$\bar{p} = \int_{P^L}^{P^H} p dH(p)$$

como la probabilidad de fallecimiento promedio de la población.

- Sea $\pi(A; I^* + Y - T, S)$ la utilidad de la industria de rentas vitalicias cuando el retorno de estas es de A. Note que

$$\pi(A; I^* + Y - T, S) = \int_{p^L}^{p^H} M(p, A) Q^*(p, A) dH(p) \tag{31}$$

en donde $Q^*(p, A) = q_1(p, A)(I^* + Y - T) - q_2(p, A)S$ es el promedio de la demanda de rentas vitalicias de individuos de tipo-p, e I^* es la herencia promedio recibita al nacer. Utilizando la relación $M(p, A) = M(p, \bar{A}) + (1-p)(\bar{A} - A)$ que se obtiene de (30), podemos escribir (31) como

$$\pi(A; I^* + Y - T, S) = \int_{p^L}^{p^H} M(p, \bar{A}) Q^*(p, A) dH(p) + (\bar{A} - A) \int_{p^L}^{p^H} (1-p) Q^*(p, A) dH(p). \tag{32}$$

Dado que $\int_{p^L}^{p^H} M(p, \bar{A}) dH(p) = 0$ [de (30) y la definición de $\bar{A}$] y dado que $\partial Q^*/\partial p < 0$, el lema anterior implica que la primera suma en (32) es negativa.[10] Dado que (para S pequeño) el segundo integral es positivo, se tiene que si $A \geq \bar{A}$, entonces $\pi(A) < 0$. El resultado $\pi(\bar{A}) < 0$ es el resultado de la selección adversa. Luego, la tasa de retorno A debe ubicarse estrictamente al interior de los límites $R/(1-p^L)$ y $R/(1-\bar{p})$ (esto es, debe ser menor que $\bar{A}$).

- La tasa de retorno de equilibrio, $\hat{A}$, debe por tanto ser una raíz de la ecuación $\pi(A) = 0$. Dado que $R/(1-p^L) < \hat{A} < R/(1-\bar{p})$, $\pi(R/(1-p^L)) > 0 > \pi(R/(1-\bar{p}))$ y que $\pi(\cdot)$ es una función contínua, existe al menos una raíz a la ecuación $\pi(A) = 0$ entre estos dos valores.[11]

[10] Nótese que

$$\int_{p^L}^{p^H} M(p, \bar{A}) Q^*(p, A) dH(p) = \int_{p^L}^{\bar{p}} M(p, \bar{A}) Q^*(p, A) dH(p) + \int_{\bar{p}}^{p^H} M(p, \bar{A}) Q^*(p, A) dH(p)$$
$$\leq Q^*(\bar{p}, A) \left[\int_{p^L}^{\bar{p}} M(p, \bar{A}) dH(p) + \int_{\bar{p}}^{p^H} M(p, \bar{A}) dH(p) \right] = 0.$$

[11] En el Apéndice B del artículo se muestra que cuando las preferencia son logarítmicas, π es estríctamente cóncava cuando $A > R$ y por lo tanto existe una única raíz tal estable (i.e., $\pi'(\hat{A}) < 0$).

Nótese que la tasa de equilibrio $\hat{A}$ puede ser expresada como una función de $I^* + Y - T$ y S. Esto, por cuanto $Q^*(p, A)$ es una función linealmente homogénea en $I^* + Y - T$ y S, de manera que si $\pi(\hat{A}; I^* + Y - T, S) = 0$, de igual forma $\pi(\hat{A}; \beta(I^* + Y - T), \beta S) = 0$, para $\beta > 0$, luego, $\hat{A}$ puede ser escrita como

$$\hat{A} = \hat{A}(I^* + Y - T, S),$$

en donde $\hat{A}(\cdot, \cdot)$ es homogenea de grado cero.

Para demostrar que $\partial \hat{A}/\partial S < 0$, recuerde que un incremento en S genera una reducción en la demanda de anualidades privadas por $q_2(p, A)$. Dado que $\partial q_2/\partial p < 0$, los individuos con mayor probabilidad de fallecer reducirán su demanda en mayor medida, lo que implica una reducción de la utilidad esperada de las CSV. Para restaurar el equilibrio la tasa de retorno $\hat{A}$ debe disminuir. Luego tenemos que

$$\frac{\partial \hat{A}}{\partial S} < 0, \qquad \frac{\partial \hat{A}}{\partial (I^* + Y - T)} = \frac{-S}{I^* + Y - T} \frac{\partial \hat{A}}{\partial S} > 0, \tag{33}$$

en donde la última condición resulta de aplicar el Teorema de Euler a $\hat{A}(\cdot, \cdot)$ que es homogénea de grado cero.

3.2.1 Efectos de estado estacionario

- Suponga que los precios de los factores se mantienen inalterados (tecnología lineal).
- Sea
$$B_t^*(p) = pB_t^D(p) + (1 - p)B_t^S(p)$$
la herencia **ex-post** (igual al promedio por la ley de los grandes números). La homoteticidad de $B_t^D(p)$ y $B_t^S(p)$ nos permite escribir
$$B_t^*(p) = \theta(p, A_{t+1})[I_t^* + Y - T + A_{t+1}^{-1} S].$$
en donde A_{t+1} es el retorno de las anualidades compradas al final del periodo t. Suponiendo que $0 < \theta(p, A_t) < 1$ para $p^L \leq p \leq p^H$, podemos definir
$$B_t^* \equiv \int_{p^L}^{p^H} B_t^*(p) dH(p) = \bar{\theta}(A_{t+1})[I_t^* + Y - T + A_{t+1}^{-1} S]$$
$$\bar{\theta}(A_t) = \int_{p^L}^{p^H} \theta(p, A_t) dH(p).$$
En estado estacionario se tiene que $B_t^* = I_t^*$, de forma que
$$B^* = \frac{\bar{\theta}(A)}{1 - \bar{\theta}(A)}(Y - T + A^{-1} S).$$

- Por la ley de los grandes números, se tiene que el sistema de pensiones retorna RT y paga $S = \bar{A}T$, dado que la **participación es obligatoria** y nadie puede **recibir más de una vez el beneficio del sistema**. Nótese que el retorno del sistema es $\bar{A} > A$, superior al sistema privado. Luego, la introducción de un sistema actuarialmente justo provoca un **incremento en el valor presente de los ingresos del afiliado**. Considerando (33), se tiene en consecuencia que

$$\left.\frac{\partial A}{\partial(I^* + Y - T)}\right|_{S=0} = 0 \quad \text{y} \quad \left.\frac{\partial A}{\partial S}\right|_{S=0} < 0.$$

  De donde se tiene que la introducción de un sistema financiado reduce el retorno de las anualidades.

- Suponiendo que $\sigma = 1$ (utilidad logarítmica) tenemos que $\bar{\theta}'(A) \leq 0$, de donde se obtiene

$$B^* = \frac{\bar{\theta}(A)}{1 - \bar{\theta}(A)}(Y + \left(A^{-1} - \bar{A}^{-1}\right) S)$$

$$\left.\frac{dB^*}{dS}\right|_{S=0} = \frac{\bar{\theta}(A)}{1 - \bar{\theta}(A)}\left[A^{-1} - \bar{A}^{-1}\right] + \frac{\bar{\theta}'(A)}{\left(1 - \bar{\theta}(A)\right)^2} Y \left.\frac{dA}{dS}\right|_{S=0} > 0.$$

  Este incremento en las herecias ocurre por dos razones. Primero, por el efecto ingreso que tiene la introducción de un sistema actuarialmente justo, y segundo, la caída en A provoca que la fracción destinada a herencias, $\bar{\theta}(A)$, se incremente.

- En el caso del consumo, tenemos que

$$c_1^* = \bar{\phi}(A)(B^* + Y - T + A^{-1}S)$$

$$\bar{\phi}(A) = \int_{p^L}^{p^H} \phi(p, A) dH(p) < 1.$$

  Con preferencias logarítmicas el efecto del cambio en A es nulo [efecto ingreso igual a efecto sustitución], por lo que el efecto en c_1^* está dado enteramente por el incremento en la restricción de presupuesto (en valor esperado) originada por (i) el incremento en B^*, (ii) el exceso de retorno del sistema de pensiones, y (iii) el mayor valor presente de $A^{-1}S$.

- En el caso del stock de capital, a nivel nacional se tiene que

$$K^* = B^* + Y - c_1^*$$
$$= Y + \frac{\bar{\theta}(A) - \bar{\phi}(A)}{1 - \bar{\theta}(A)}[Y + (A^{-1} - \bar{A}^{-1})S]$$

$$\left.\frac{dK}{dS}\right|_{S=0} = Y \frac{1 - \bar{\phi}(A)}{\left(1 - \bar{\theta}(A)\right)^2} \bar{\theta}'(A) \left.\frac{dA}{dS}\right|_{S=0} + \frac{\bar{\theta}(A) - \bar{\phi}(A)}{1 - \bar{\theta}(A)}(A^{-1} - \bar{A}^{-1}).$$

El signo de la expresión depende $\bar{\theta}(A)$ y $\bar{\phi}(A)$. Si $\bar{\phi}(A) < \bar{\theta}(A) < 1$ el efecto es positivo. Intuitivamente, lo que se requiere es que el motivo de herencia, λ, sea lo suficientemente fuerte. Esto es

$$\left.\frac{dK}{dS}\right|_{S=0} = \begin{cases} < 0 & \text{si } \lambda \text{ es pequeño} \\ \\ > 0 & \text{si } \bar{\phi}(A) < \bar{\theta}(A) < 1. \end{cases}$$

4 Abel (2001)[12]

- El autor estudia el impacto de un cambio en la composición del portafolio de inversiones en un sistema de pensiones financiado, de contribuciones definidas, en donde una parte de la población no participa activamente en el mercado de valores. Fenómeno ampliamente reconocido en la mayoría de las economías.

4.1 El modelo

- La economía es habitada por generaciones traslapadas de individuos que viven por dos periodos. Los individuos poseen una dotación incial de $n > 0$ unidades efectivas de trabajo, que ofrecen inelásticamente solo en la etapa activa de su vida (primer periodo).

- Existe heterogeneidad intrageneracional en la dotación de trabajo de cada individuo (desigualdad del ingreso). $G(x)$ es la medida de individuos con $n \leq x$. Supongamos que $G(x)$ es diferenciable, para $x > 0$, y que $G(\infty) = 1$; luego, la cantidad de trabajo ofrecida en el agragado está dada por

$$N \triangleq \int_0^\infty n dG(n) = 1,$$

  que por simplicidad normalizaremos a uno.

- La tecnología de la firma es sacada de la literatura de crecimiento endógeno,

$$Y_i = AK_i^\alpha \left(KN_i\right)^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

  en donde K_i es el stock de capital de la firma i, N_i es el trabajo empleado por la firma i, K es el stock de capital agragado, y $A > 0$ es una variable aleatoria.

- El producto marginal de los factores está dado por

$$\frac{\partial Y_i}{\partial K_i} = \alpha A \left(\frac{K_i}{N_i}\right)^{\alpha-1} K^{1-\alpha}, \quad \frac{\partial Y_i}{\partial N_i} = (1-\alpha) A \left(\frac{K_i}{N_i}\right)^{\alpha} K^{1-\alpha}.$$

  En equilibrio el ratio de capital a trabajo es igualado entre firmas y es igual al agregado. Dado que $N = 1$, tenemos que

$$\frac{K_i}{N_i} = K.$$

  Correspondientemente, $R = \alpha A$ (independiente de K), y $w = (1-\alpha)AK$.

- Hay un continuo de individuos indexados por n. Los individuos jóvenes que ahorran parte de su ingreso disponible en el mercado de valores son asignados al grupo H. Los

[12] Abel, A.B. (2001): "The Effects of Investing Social Security Funds in the Stock Market when Fixed Costs Prevent some Household from Holding Stocks," *American Economic Review* **91**(1), pp. 128-148.

jóvenes que ahorran, pero no utilizan el mercado de valores, son asignados al grupo M. Finalmente, los jóvenes que no ahorran son asignados al grupo L.

Cada individuo recibe una remuneración de w por cada unidad de trabajo y paga un impuesto de T cuando joven. Los individuos pasivos reciben un pago por cuenta del sistema de pensiones de contribución definida.

- El sistema de pensiones invierte $\theta_b \geq 0$ en bonos libres de riesgo y $\theta_k \geq 0$ en activos riesgosos a cuenta y riesgo de los individuos. Al periodo siguiente, ellos reciben $\theta_b r + \theta_k R$, en donde $r \geq 0$ es el retorno bruto de los bonos libres de riesgo y $R > 0$ el de los activos riesgosos.

  Los individuos deben decidir, adicionalmente, como distribuir sus ahorros dentro de estos dos tipos de activos, sujeto a una restricción de liquidez que consiste en consumir no más que su ingreso disponible. Adicionalmente, en caso de participar en el mercado de valores el individuo debe incurrir en un costo monetario y/o sicológico.

- El ahorro de individuo está determinado por

$$s = wn - T - \delta F_1 - c,$$

  en donde δ es una función indicadora que toma el valor uno cuando el individuo invierte en el mercado de valores, y $F_1 \geq 0$ es el costo de participación (monetario) en que debe incurrir el ahorrante. Una parte del ahorro es destinado a activos riesgosos, k, mientras que la diferencia, $s - k$, se destina a bonos libres de riesgo.

  Sean $b = s - k + \theta_b$ el monto invertido en bonos libres de riesgo **directa e indirectamente**, y asimismo, $h = k + \theta_k$ el monto invertido en activos riesgosos. Definamos $a = b + h$ el monto total en activos. Luego,

$$a = b + h = \Omega - \delta F_1 - c, \tag{34}$$

  en donde

$$\Omega = wn - T + \theta_b + \theta_k \tag{35}$$

  es la riqueza cuando joven.

  En la etapa inactiva, el individuo consume

$$x = br + hR. \tag{36}$$

- Por simplicidad, supondremos la siguiente función de utilidad

$$U = \ln (c - \delta F_2) + \beta \mathbf{E} [\ln x], \qquad \beta > 0, \tag{37}$$

  en donde $F_2 \geq 0$ es un costo (sicológico) por participar en el mercado de valores. F_1 o F_2 pueden ser cero, aunque la condición $F_1 + F_2 > 0$ es necesaria para los resultados que a continuación se presentan.

- **El Grupo que Participa en el Mercado de Valores**

Un individuo que participa en el mercado de valores maximiza (37), sujeto a (34) y (36). Utilizando como variables de control a y $\gamma \equiv h/a$ y reemplazando $\delta = 1$, tenemos

$$\max_{(a,\gamma)} \ln(\Omega - F_1 - F_2 - a) + \beta \ln a + \beta\psi(\gamma, r) \tag{38}$$

en donde

$$\psi(\gamma, r) = \mathbf{E}\left[\ln((1-\gamma)r + \gamma R)\right]. \tag{39}$$

Suponiendo la existencia de una solución interior, tenemos que

$$a = \frac{\beta}{1+\beta}(\Omega - F_1 - F_2), \tag{40}$$

lo que muestra que a es independiente de las tasas de retorno (utilidad logarítmica) y proporcional a Ω. Por su parte, F_1 reduce la tenencia de activos al disminuir Ω, mientras que F_2 lo hace por la vía de incrementar la utilidad marginal del consumo en la etapa activa.

Consideremos ahora la determinación de γ. Suponiendo la existencia de una solución interior, tenemos que la fracción óptima invertida en activos riesgoses es la solución a:

$$Z(\gamma, r) \equiv \mathbf{E}\left[\frac{R - r}{(1-\gamma)\,r + \gamma R}\right] = 0. \tag{41}$$

La ecuación (41) define la fracción óptima de $\gamma(r)$ implícitamente. Es fácil verificar que $\gamma'(r) < 0$ y que $\gamma(r)$ tiene el mismo signo que $\mathbf{E}[R - r]$. En adelante el análisis será confinado al caso en que $\gamma(r) > 0$ [el premio por riesgo es en general positivo].

Las funciones $b_H(\Omega, r, \theta_k)$ y $h_H(\Omega, r, \theta_k)$ representan los valores óptimos de b y h. Utilizando (40) se obtiene

$$b_H(\Omega, r, \theta_k) = [1 - \gamma(r)]\frac{\beta}{1+\beta}(\Omega - F_1 - F_2) \tag{42}$$

$$h_H(\Omega, r, \theta_k) = \gamma(r)\frac{\beta}{1+\beta}(\Omega - F_1 - F_2). \tag{43}$$

Sea $V_H(\Omega, r, \theta_k)$ la función de utilidad indirecta de un individuo que participa en el mercado de valores. Reemplazando (42) y (43) en (38) se obtiene

$$\begin{aligned} V_H(\Omega, r, \theta_k) &= \beta \ln \beta - (1+\beta)\ln(1+\beta) + (1+\beta)\ln(\Omega - F_1 - F_2) \\ &\quad + \beta\psi(\gamma, r) \\ \frac{\partial V_H}{\partial \Omega} &= \frac{1+\beta}{\Omega - F_1 - F_2} > 0 \\ \frac{\partial V_H}{\partial r} &= \beta(1-\gamma)\mathbf{E}\left[\frac{1}{(1-\gamma)\,r + \gamma R}\right] \\ \frac{\partial V_H}{\partial \theta_k} &= 0 \end{aligned} \tag{44}$$

En este caso, el efecto de r depende en la posición neta del individuo en bonos. Si está largo en bonos el efecto será positivo, mientras que si mantiene una posición corta (deudora) se verá perjudicado.

- **El Grupo que No Ahorra en el Mercado de Valores**

En el caso de los individuos del grupo M, su tenencia de activos riesgosos está delimitada a $h = \theta_k$. Al no invertir en el mercado de valores se ahorran los costos de participación. En este caso, el problema del individuo está dado por

$$\max_b \ \ln(\Omega - \theta_k - b) + \beta \mathbf{E}\left[\ln(br + \theta_k R)\right].$$

Sea $b_M(\Omega, r, \theta_k)$ la solución del problema de control. Es posible mostrar que

$$b_M(\Omega, r, 0) = \frac{\beta}{1+\beta}\Omega \tag{45}$$

$$\left.\frac{\partial b_M(\Omega, r, \theta_k)}{\partial \theta_k}\right|_{\theta_k=0} = -\frac{\mathbf{E}\left[R/r\right] + \beta}{1+\beta} < -1 \tag{46}$$

en donde la desigualdad se obtiene de la condición $\mathbf{E}\left[R - r\right] > 0$.

De la expresión en (45) se desprende que $b_M(\Omega, r, 0)$ es proporcional a Ω, e insensible a r (preferencias logarítmicas). La interpretación de (46) sigue del efecto ingreso involucrado (en términos esperados) en el premio por riesgo, que resulta en un aumento del consumo cuando joven. Una simple sustitución de $d\theta_k = -d\theta_b < 0$, conlleva un incremento de de la riqueza esperada en valor presente de $\mathbf{E}\left[R - r\right]/r$, lo que multiplicado por la propensión a consumir ($\Delta c_M = [1/(1+\beta)]\mathbf{E}\left[R - r\right]/r$) resulta en una disminución de la tenencia total de activos ($1 + \Delta c_M$ corresponde a (46)).

La función de utilidad indirecta de los individuos del tipo M está dada por

$$V_M(\Omega, r, 0) = \beta \ln \beta - (1+\beta)\ln(1+\beta) + (1+\beta)\ln\Omega + \beta \ln r, \tag{47}$$

de donde se tiene que

$$\left.\frac{\partial V_M(\Omega, r, \theta_k)}{\partial \Omega}\right|_{\theta_k=0} = \frac{1+\beta}{\Omega} > 0$$

$$\left.\frac{\partial V_M(\Omega, r, \theta_k)}{\partial r}\right|_{\theta_k=0} = \frac{\beta}{r} > 0 \tag{48}$$

$$\left.\frac{\partial V_M(\Omega, r, \theta_k)}{\partial \theta_k}\right|_{\theta_k=0} = \frac{1+\beta}{\Omega}\left(\mathbf{E}\left[R/r\right] - 1\right) > 0. \tag{49}$$

El efecto de r proviene de la posición larga que tiene el individuo en este activo, mientras que el efecto de θ_k está dada por el incremento del valor presente esperado de la restricción de presupuesto.

La Decisión de Participación

Para el caso de los individuos del tipo M, una decisión importante es la de participar en el mercado de valores. Para esta decisión el individuo debe comparar $V_H(\Omega, r, \theta_k)$ y $V_M(\Omega, r, \theta_k)$. Sea

$$D(\Omega, r, \theta_k) \equiv V_H(\Omega, r, \theta_k) - V_M(\Omega, r, \theta_k).$$

Si $D(\Omega, r, \theta_k) > 0$, el individuo participará en el mercado de valores. Definamos como $\hat{\Omega}(r, \theta_k)$, el valor de Ω, tal que

$$D(\hat{\Omega}(r, \theta_k), r, \theta_k) = 0.$$

Para calcular $\hat{\Omega}$ cuando $\theta_k = 0$, basta con sustituir (44) y (47) en la definición de $D(\Omega, r, \theta_k)$ y utilizar la definción de $\psi(\gamma, r)$ en (39) para a continuación evaluar la expresión resultante en $\theta_k = 0$, de donde se obtiene

$$D(\Omega, r, 0) = (1 + \beta) \ln (1 - (F_1 + F_2)/\Omega) + \beta\Psi(r) \tag{50}$$

en donde

$$\Psi(r) = \max_{\gamma} \mathbf{E} [\ln (1 - \gamma + \gamma R/r)] > 0.$$

Igualando la mano derecha de (50) a cero, y resolviendo para Ω se obtiene

$$\hat{\Omega}(r, 0) = \frac{F_1 + F_2}{1 - \exp\{-(\beta/(1 + \beta))\Psi(r)\}} > F_1 + F_2 > 0.$$

De esta forma, para los individuos con $\Omega < \hat{\Omega}(r, 0)$, $D(\Omega, r, 0) < 0$, por lo que les resulta óptimo no participar. Nótese que un incremento de r hace menos atractiva la alternativa de invertir en activos riesgosos (incrementa el valor de $\hat{\Omega}(r, 0)$. Asimismo, un incremento de θ_k disminuye las ganancias potenciales. Finalmente, de (35) se tiene que

$$\hat{n} = w^{-1} \left(\hat{\Omega} + T - \theta_b - \theta_k \right),$$

correspondiente al valor de corte de la participación en el mercado de valores.

Nótese que para los individuos que están indiferentes ($\Omega = \hat{\Omega}$), una pequeña variación de r o θ_k puede alterar su estatus. Confinandonos al caso $\theta_k = 0$ y definiendo $\Delta_{\hat{b}} \equiv b_M(\hat{\Omega}, r, 0) - b_H(\hat{\Omega}, r, 0)$ como la diferencia de la posición en bonos (directa e indirecta), y $\Delta_{\hat{k}} = -h_H(\hat{\Omega}, r, 0)$ como la diferencia de la posición en el activo riesgoso, se tiene de las ecuaciones (42), (43) y (45) que

$$\Delta_{\hat{b}} = \frac{\beta}{1 + \beta}[\gamma(r)\hat{\Omega} + (1 - \gamma(r))(F_1 + F_2)$$

$$\Delta_{\hat{k}} = -\gamma(r)\frac{\beta}{1 + \beta}(\hat{\Omega} - F_1 - F_2) < 0.$$

De estas expresiones se tiene que un "switcher" que decide no participar en el mercado de valores posee más bonos y menos acciones que uno que decide participar. En efecto total en el tamaño del portfolio corresponde por tanto a

$$\Delta_{\hat{b}} + \Delta_{\hat{k}} = \frac{\beta}{1+\beta}(F_1 + F_2) > 0$$

que implica una mayor tenencia de activos para un switcher que decide no participar.

- **El Grupo que No Ahorra**

  Recuerde que los individuos pueden tomar posiciones cortas en tanto tengan una posición consolidada no negativa [i.e., es posible pedir un préstamo denominado en una clase de activo, para a continuación adquirir de la otra clase de activo]. No así para financiar consumo por sobre su ingreso disponible. Esto es

$$c \leq wn - T.$$

  Suponga que $\theta_k = 0$ y considere un individuo con $\Omega < \hat{\Omega}$. En ausencia de restricciones de financiamiento el individuo consumiría $[1/(1+\beta)]\Omega$, cantidad que viola la restricción de financiamiento si $\Omega > (1+\beta)(wn - T)$, o alternativamente,

$$\Omega < \Omega_0 \equiv \frac{1+\beta}{\beta}\theta_b.$$

- En adelante supondremos que $\Omega_0 < \hat{\Omega}$, lo que da origen a tres regiones Una con individuos que consumen todo su ingreso disponible y en la vejez consumen solo lo que les entrega el sistema de pensiones, individuos que ahorran directamente solo en activos libres de riesgo, e individuos que ahorran directamente en ambos tipos de activos.

4.2 Equilibrio en el mercado de capitales

- Sea

$$\begin{aligned} B^D(r, \theta_k, \theta_b, T, AK) = & \int_{\hat{n}}^{\infty} b_H\left((1-\alpha)\, AKn - T + \theta_b + \theta_k, r, \theta_k\right) dG(n) \\ & + \int_{n_0}^{\hat{n}} b_M\left((1-\alpha)\, AKn - T + \theta_b + \theta_k, r, \theta_k\right) dG(n) \\ & + \theta_b G(n_0) \end{aligned}$$

  la demanda agregada de bonos, en donde $n_0 = w^{-1}(T + \theta_b/\beta)$. la condición de equilibrio está dada por $B = B^D(r, \theta_k, \theta_b, T, AK)$. Sea

$$K^D(r, \theta_k, \theta_b, T, AK) = \theta_k G(\hat{n}) + \int_{\hat{n}}^{\infty} h_H\left((1 - \alpha AKn - T + \theta_b + \theta_k, r, \theta_k\right) dG(n))$$

  la demanda de capital riesgoso y K' la oferta disponible al final del primer periodo. La condición de equilibrio está dada por $K^D(r, \theta_k, \theta_b, T, AK) = K'$.

4.3 Efecto de invertir una pequeña cantidad en el mercado de valores

- Considere la siguiente sustitución de activos $d\theta_k = -d\theta_b < 0$, en torno a $\theta_k = 0$. Consideraremos los efectos de esta sustitución solo para el periodo en curso. Nótese que si todos los individuos invirtieran en el mercado de valores el cambio propuesto no tendría efecto alguno, dado que este no es el caso, la sustitución tendrá efectos reales. En particular, se tiene que

$$\left.\frac{dK^D(r,\theta_k,\theta_b,T,AK)}{d\theta_k}\right|_{\substack{\theta_k=0\\ d\theta_k=-d\theta_b}} = -\frac{1}{1+\beta}\frac{E\left[R\right]-r}{r}\left[G(\hat{n})-G(n_0)\right] + \left(\Delta_{\hat{b}}+\Delta_{\hat{k}}\right)\frac{d\hat{n}}{d\theta_k}dG(\hat{n}). \tag{51}$$

  El efecto de la sustitución tiene dos componentes. El primero representa la reducción en el ahorro agregado resultante del incremento en consumo por parte de los individuos M, que se origina a partir del incremento en valor esperado del ingreso en el segundo periodo por el premio por riesgo, $[\mathbf{E}\left[R\right]-r]/r$, la propensión marginal a consumir, $1/(1+\beta)$, y la medida de este grupo en la población, $G(\hat{n})-G(n_0)$. El segundo componente proviene del incremento en ahorro ocasionado por los "switchers", en donde cada uno incrementa su ahorro en $(\Delta_{\hat{b}}+\Delta_{\hat{k}})$, y la medida de este grupo corresponde a $(d\hat{n}/d\theta_k)dG(\hat{n})$.

- En adelante despreciaremos el efectos de los "switchers". Haciendo esto, el efecto sobre el capital está dado por el primer componente en (51), que corresponde a $-\Delta c_M[G(\hat{n})-G(n_0)] < 0$. Al considerar cada grupo se tiene que para el grupo H no hay efecto, esto es, la sustitución es reversada 100%. En el caso de los individuos del grupo M, el efecto es total (dado que no hay switchers), mientras que en el grupo L el efecto es neutralizado por construcción $[d\theta_k = -d\theta_b]$.

- El cambio en utilidad se produce por tanto en el grupo M. Dicho cambio está dado por

$$dV_M = \left(\left.\frac{\partial V_M(\Omega,r,\theta_k)}{\partial\theta_k}\right|_{\theta_k=0}\right)d\theta_k + \left(\left.\frac{\partial V_M(\Omega,r,\theta_k)}{\partial r}\right|_{\theta_k=0}\right)dr > 0,$$

  que se obtiene de las ecuaciones (48) y (49); nótese que $dr > 0$ debido a la menor demanda de activos. Igual cosa ocurre con los individuos del grupo L. Asimismo, por este último efecto ($dr > 0$) también se benefician los individuos del grupo H,

$$dV_H = \frac{\partial V_H}{\partial r}dr = \beta(1-\gamma)\mathbf{E}\left[\frac{1}{(1-\gamma)r+\gamma R}\right]dr > 0,$$

  condición que resulta de suponer que $(1-\gamma) > 0$.

- Sin embargo, esto no implica un “free-lunch” ya que la próxima generación tendrá una menor dotación de capital y en consiguiente un menor salario. Adicionalmente, el incremento de r implica una mayor carga para los contribuyentes futuros.