

GUÍA DE EJERCICIOS N° 4 CON RESPUESTAS

Decisiones Bajo Incertidumbre

PREGUNTA 1: Introduciendo los conceptos

¿Cuál sería el precio realmente justo de cada una de los siguientes juegos?

- (a) Ganar \$1000 con una probabilidad de 0.5 y perder \$1000 con una probabilidad de 0.5
- (b) Ganar \$1000 con una probabilidad de 0.6 y perder \$1000 con una probabilidad de 0.4
- (c) Ganar \$1000 con una probabilidad de 0.7, perder \$2000 con una probabilidad de 0.2 y perder \$10000 con una probabilidad de 0.1

Respuestas:

El precio justo estará dado por el valor esperado del premio de cada juego:

$$(a) E(\text{premio}) = 1000 \cdot 0.5 + (-1000) \cdot 0.5 = 500 - 500 = 0$$

$$(b) E(\text{premio}) = 1000 \cdot 0.6 + (-1000) \cdot 0.4 = 600 - 400 = 200$$

$$(c) E(\text{premio}) = 1000 \cdot 0.7 + (-2000) \cdot 0.2 + (-10000) \cdot 0.1 = 700 - 400 - 1000 = -700$$

PREGUNTA 2: Incertidumbre y decisiones de Inversión

El gobierno de un pequeño país ha iniciado recientemente un plan de estabilización; no está claro si éste será exitoso o no. Se estima que con una probabilidad del 50% el plan será exitoso y que, también con una probabilidad de un 50%, éste fracasará. Un empresario debe elegir entre dos proyectos de inversión, uno en el pequeño país y otro en el extranjero.

Las utilidades del proyecto en el extranjero serán de 400 mil dólares, independientemente de si el plan de estabilización fracasa o no. Las utilidades del proyecto en el país serán de 200 mil dólares si el plan de estabilización fracasa y de 800 mil si éste tiene éxito. El empresario es neutro al riesgo. Responda las siguientes preguntas, justificando sus respuestas:

- (a) ¿Cuál de los proyectos de inversión elegirá el empresario?
- (b) ¿Cuál es la mayor cantidad de dinero que el empresario estaría dispuesto a pagar por saber, antes de decidir cual inversión realizar, si el plan de estabilización será exitoso o no?

Respuestas:

Resumamos la información:

	<i>Plan Fracasa (pbb 0.5)</i>	<i>Plan Exitoso (pbb 0.5)</i>
<i>Utilidades proyecto extranjero</i>	400.000	400.000
<i>Utilidades proyecto país pequeño</i>	800.000	200.000

- (a) *Escogerá aquella alternativa que en promedio le reporte mayor ingreso (recordemos que es neutro al riesgo, por lo tanto su utilidad es lineal con respecto al ingreso)*

Ingreso proyecto extranjero = \$400.000 (ingreso cierto)

$$E(\text{Ingreso proyecto país}) = 800.000 \cdot 0.5 + 200.000 \cdot 0.5 = \$500.000$$

Por lo tanto escogerá invertir en el pequeño país.

(b) En ese caso debemos calcular cuál es el valor esperado del ingreso con información perfecta y compararla con la parte (a) sin información:

Si tuviéramos información perfecta y el supiéramos que el plan será exitoso invertiríamos en el país, pero si sabemos que será un fracaso, invertiríamos en el extranjero. Recordemos además que se trata de un individuo neutro al riesgo. Entonces:

$$E(\text{ingreso con información}) = 800.000 \cdot 0.5 + 400.000 \cdot 0.5 = 400.000 + 200.000 = \$600.000$$

$$E(\text{ingreso sin información}) = \$500.000 \text{ (solución parte (a))}$$

Por lo tanto estaremos dispuestos a pagar a lo más \$100.000 por tener información perfecta. (valor de la información)

PREGUNTA 3: Sistema Tributario

El sistema tributario de un país es tal que cobra una tasa única de impuesto de un 35% sobre los Ingresos de las personas. Además, se fiscaliza un porcentaje de las declaraciones y en el 100% de los casos inspeccionados en que el contribuyente declara menos ingresos que los reales, se detecta dicha evasión, procediéndose a cobrar el impuesto sobre los ingresos reales, además de una multa sobre el monto del ingreso real. Planteado frente a este sistema, un contribuyente neutro al riesgo debe decidir entre declarar sus ingresos reales o un monto inferior a éstos. Si su ingreso real es de 1000 y la tasa de impuestos es igual a un 35%, determine:

- El ingreso máximo declarado D , cuando la multa es de un 10% y la probabilidad de fiscalización es de un 60%, tal que deja indiferente al individuo entre declarar ese monto y todo su ingreso.
- La multa mínima, para que el individuo prefiera NO evadir, si la fiscalización es de un 50%.
- El porcentaje mínimo de declaraciones a fiscalizar, para que el individuo prefiera NO evadir nada si la multa es de un 60%.

Respuestas:

(a) Llevemos la información a la nomenclatura vista en el curso:

$$t = 0.35 \quad \text{tasa impuesto 35\%}$$

$$f = 0.6 \quad \text{probabilidad fiscalización 60\%}$$

$$I = 1000 \quad \text{ingreso real}$$

$$m = 0.1 \quad \text{multa 10\%}$$

Además tenemos que los pagos que se deben realizar en cada caso son:

	Me descubren	No me descubren
Declaro todo	-350	-350
Declaro sólo "D"	$-350 - 100 = -450$ (35% de 1000 y 10% de 1000)	$-0.35 \cdot D$ (35% de "D")

$$E(\text{ingreso si declaro todo}) = -350$$

$$E(\text{ingreso si declaro "D"}) = -450 \cdot 0.6 + 0.4 \cdot (-0.35 \cdot D) = -270 - 0.14D$$

Ahora es fácil calcular lo demás: La cantidad máxima "D" será cuando $E(\text{ingreso si declaro todo}) =$

$E(\text{ingreso de declarar sólo D})$

Por lo tanto, obtengo " $D_{\text{máx}}$ " de igualar: $-350 = -270 - 0.14D_{\text{máx}}$

$$\Rightarrow D_{\text{máx}} = 571$$

(b) Esta parte se hace igual que la anterior, sólo cambian los valores y la incógnita que debemos encontrar. Recordar usar $D = 500$.

(c) Esta parte también se hace igual que lo demás.

PREGUNTA 4: Premio por Riesgo

Un joven inversionista invirtió en una empresa de computación, ya que ella está a punto de lanzar al mercado un nuevo software llamado Puerta's que reemplazará al Ventana's Millenium Edition. Sin embargo la industria del software está pasando por un momento de mucha competencia por lo cual no se

sabe si cuando este producto salga al mercado no haya aparecido antes el nuevo producto de la competencia, Ventana's XP. La probabilidad de que cuando Puerta's aparezca en el mercado ya haya aparecido Ventana's XP es de un 40% y en ese escenario los ingresos del inversionista son de 100 UM. Al contrario la probabilidad de que Puerta's salga al mercado y no haya aparecido Ventana's XP es de un 60% y en ese caso el inversionista recibe 900 UM.

- Calcule el ingreso esperado de la inversión.
- Calcule la utilidad esperada de su inversión si su función de utilidad es: $U(M) = M^{1/2}$
- ¿Cuánto es el premio por riesgo que está exigiendo el inversionista?

Respuestas:

Reescribiendo la información del problema:

	<i>Apareció XP</i>	<i>No Apareció XP</i>
	<i>Pbb = 0.4</i>	<i>Pbb = 0.6</i>
<i>Lanzo Puerta's</i>	100	900
<i>NO Lanzo Puerta's</i>	0	0

(a) $E(\text{ingreso si lanzo el producto}) = 0.4 \cdot 100 + 0.6 \cdot 900 = 40 + 540 = 580 \text{ UM}$

(b) $U(M) = M^{1/2}$

$U(\text{si lanzo y apareció XP}) = 100^{1/2} = 10$

$U(\text{si lanzo y no apareció XP}) = 900^{1/2} = 30$

$E(U) = 10 \cdot 0.4 + 30 \cdot 0.6 = 22$ (utilidad esperada de la inversión o esperanza de la utilidad)

IMPORTANTE: la utilidad esperada NO es lo mismo que la utilidad del ingreso esperado. Ésta última sería la utilidad que me da obtener el ingreso esperado de 580, es decir $580^{1/2} = 24$.

(c) El premio por riesgo se calcula así: Calculo un M tal que me dé el mismo nivel de utilidad:

Es decir busco el M que: $M^{1/2} = 22 \Rightarrow M = 484$

Por lo tanto el premio por riesgo es: $PPR = 580 - 484 = 96 \text{ UM}$

PREGUNTA 5: Diversificación

Suponga que Usted dispone de US\$ 10.000 para invertir y existen dos alternativas de inversión: acciones de la compañía A y acciones de la compañía B. Una acción de cualquiera de las dos compañías cuesta US\$ 1 y Ud. cree que aumentará a US\$ 2 si la compañía tiene un buen desempeño y que la acción quedará sin valor si el desempeño es malo. Cada compañía tiene una probabilidad de 50% de marchar bien. Si Ud. decide que invertirá sólo US\$ 4.000 y evalúa las siguientes alternativas:

- Alternativa 1: Invertir sólo en la empresa A.
- Alternativa 2: Invertir la mitad en la empresa A y mitad en la empresa B.

Calcule las utilidades asociadas a cada alternativa y muestre gráficamente que la estrategia diversificada le entregará una mayor utilidad.

Respuestas:

Supongamos que invierte todo en A: Con un 50% de probabilidad obtendré finalmente \$6.000 (pierdo los 4000 que invierto y me quedo sólo con los 6000) y con un 50% obtendré finalmente \$14.000 (doblo los 4000 que apuesto: 8000 mas los 6000 = 14.000)

Por lo tanto: $E(\text{ingreso invertir sólo en A}) = 0.5 \cdot 6000 + 0.5 \cdot 14000 = \10000

Este nivel de ingreso tiene asociado un nivel de utilidad U_1 .

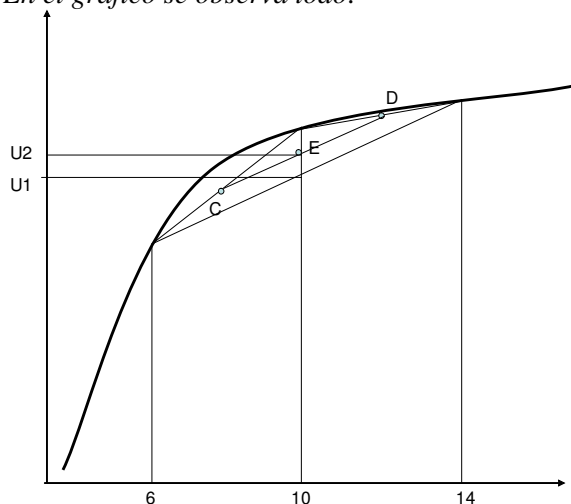
Ahora si invierto \$2000 en A y \$2000 en B, tendré 4 escenarios posibles:

	B: resultado malo	B: resultado bueno
A: resultado bueno	6.000	10.000
A: resultado malo	10.000	14.000

En este caso vemos que el resultado del ingreso esperado es el mismo $E(\text{ingreso al diversificar}) = \10000 . La diferencia está en que esta alternativa es menos riesgosa, porque sólo en el 25% de los casos quedo con 6.000.

Para ver el nivel de utilidad asociado usamos el ingenio: Del promedio de 6000 y 10000 obtenemos el punto C, del promedio de 10000 y 14000 obtenemos el punto D, y del promedio de C y D obtengo E, asociado al nivel de utilidad U_2 .

En el gráfico se observa todo:



Claramente el nivel de utilidad U_2 es mayor que el nivel de utilidad U_1 . Eso muestra que al diversificar se tiene una mayor utilidad.

PREGUNTA 6: Control 2 2001

Cierta empresa debe decidir si instala nuevas sucursales en el centro de Santiago. En particular desea instalar dos locales nuevos en una concurrida avenida. Los ingresos provenientes de esta inversión dependerán del nivel de demanda existente en el lugar. La firma cuenta con estudios históricos que señalan que la probabilidad de que la Demanda sea alta es de **0.3** y la probabilidad de que la demanda sea baja es de un **0.7**. En la siguiente tabla se resumen los **INGRESOS** esperados en cada caso:

	Demanda Alta	Demanda Baja	Ingreso Esperado	Desviación Estándar	Coefficiente de Variación
Instala nuevo local	100	20	44	37	0.83
No instala	30	50	44	9	0.21

- (a) Determine qué decidirá la empresa si es neutra al riesgo y cuál escogerá si es adversa.
- (b) Suponiendo que es neutro al riesgo, determine cuánto estará dispuesto a pagar por tener información perfecta respecto al comportamiento de la demanda en el futuro.
- (c) Suponiendo que es adverso al riesgo, con coeficiente de aversión igual a 1, ¿Cuánto está dispuesto a pagar por una alternativa que le asegure un **INGRESO** igual a 44, sin importar cuál sea la demanda? Para responder esta parte recuerde que la fracción de su ingreso esperado que un individuo está dispuesto a sacrificar con objeto de evitar la incertidumbre en su ingreso viene dada (aproximadamente) por $\frac{1}{2} R(CV)^2$, donde R denota el coeficiente de aversión al riesgo y CV el coeficiente de variación correspondiente.

Respuestas:

- (a) *Las personas prefieren las alternativas que le den una mayor utilidad esperada.*

Una persona neutra al riesgo estará indiferente entre las dos alternativas ya que las dos le aseguran el mismo ingreso esperado. Recordemos que para una persona neutra al riesgo la utilidad es proporcional al ingreso por lo que es equivalente observar la utilidad esperada (que acá no tenemos) y el ingreso esperado.

No tenemos información acerca de la utilidad esperada, pero sabemos que una persona aversa al riesgo preferirá la alternativa que tiene menor dispersión de sus valores de ingreso. Esto lo podemos afirmar porque las dos alternativas dan el mismo ingreso esperado. Es decir ante el mismo ingreso esperado, aquella alternativa que tenga una menor dispersión, le entregará una mayor utilidad y ésa es la alternativa escogida.

En definitiva, el neutro estará indiferente entre instalar o no el local, y el averso preferirá no instalarlo.

- (b) *Dado que es neutro al riesgo podemos calcular el valor de la información como se muestra a continuación:*

E (ingresos sin información) = 44 (asociado a cualquier alternativa, porque está indiferente)

Si tuviera información perfecta escogería instalar si la demanda es alta y no instalar si la demanda es baja, por lo tanto:

E (ingresos con información) = $100 \cdot 0.3 + 50 \cdot 0.7 = 30 + 35 = 65$

Valor de la información = $65 - 44 = 21$

- (c) *Si es averso al riesgo, entonces no instala por lo visto en la parte (a), entonces CV=0.21*

La fracción del ingreso esperado que estará dispuesto a sacrificar por no tener incertidumbre está dada por:

$X = \frac{1}{2} R(CV)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (0.21)^2 \sim 0.02$ Es decir estará dispuesto a sacrificar un 2% de su ingreso esperado (44). Es decir 0.88 UM.

PREGUNTA 7: Control 2 2002

A continuación se presenta información sobre la curva de utilidad de Elena.

Utilidad total (unidades)	Ingreso (miles de \$)
100	5,0
80	2,6
60	1,6
40	1,0
20	0,4
0	0,0

(a) ¿Podría decir si Elena es amante, neutra o adversa al riesgo? Explique

Suponga que a Elena le ofrecen un empleo como vendedora, en el que existe una probabilidad de 50% de obtener \$4.000 al mes y una probabilidad de 50% de no tener ingreso alguno.

(b) ¿Cuál es el ingreso esperado de Elena si toma ese empleo? ¿Cuál sería la utilidad esperada?

(c) Aproximadamente ¿Cuánto tendría que ofrecer otra empresa a Elena para convencerla de no tomar el empleo de ventas con ingresos inciertos? Explique y Grafique su respuesta.

(d) Suponga ahora, que Elena ha comprado una pequeña cabaña para pasar los fines de semana en la ladera de una loma pronunciada e inestable. Ella gastó toda su riqueza de \$5.000 en este proyecto. Hay una probabilidad de un 75% de que la casa se desplome y no tenga valor alguno. ¿Cuánto estará dispuesta a pagar Elena por una póliza de seguros que le pague \$5.000 si la casa se desploma? Explique su respuesta.

Respuestas:

(a) *Dos maneras de responder:*

1. *Graficar los valores dados y notar que se trata de una persona aversa al riesgo porque resulta una curva cóncava.*
2. *Observar que ante una misma variación de utilidad (de 20 en 20) la variación del ingreso es cada vez mayor comenzando desde el punto 0 – 0 (0,4, 0,6, 0,6, 1,0, 1,4). Por lo tanto es aversa al riesgo.*

(b) *El ingreso esperado, son los ingresos que se espera obtener en promedio:*

$$E(I) = 4000*0.5 + 0*0.5 = 2000$$

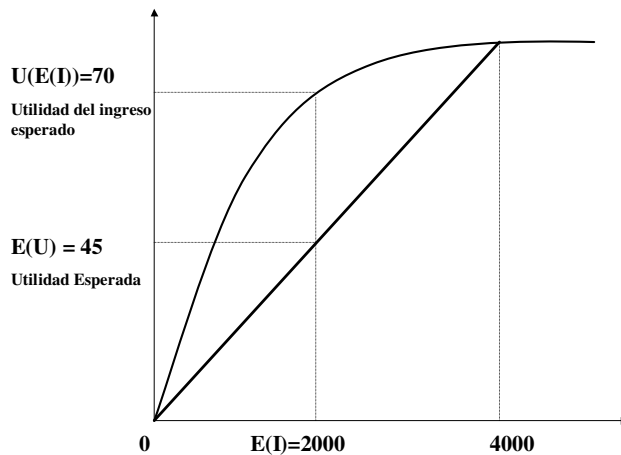
La utilidad esperada, es la utilidad que se espera tener en promedio:

$$E(U) = U(4000)*0.5 + U(0)*0.5$$

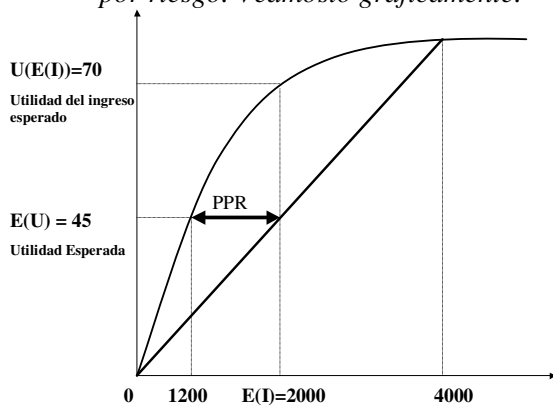
Como no tenemos el valor exacto de la utilidad asociada a un ingreso de \$4000, la estimamos: Sabemos que el valor de \$4000 está entre \$2600 y \$5000. Podríamos verlo gráficamente o tomar un valor de la utilidad entre 80 y 100. Para facilitar los cálculos, tomaremos un nivel de utilidad de 90.

$$E(U) = 90*0.5 + 0*0.5 = 45$$

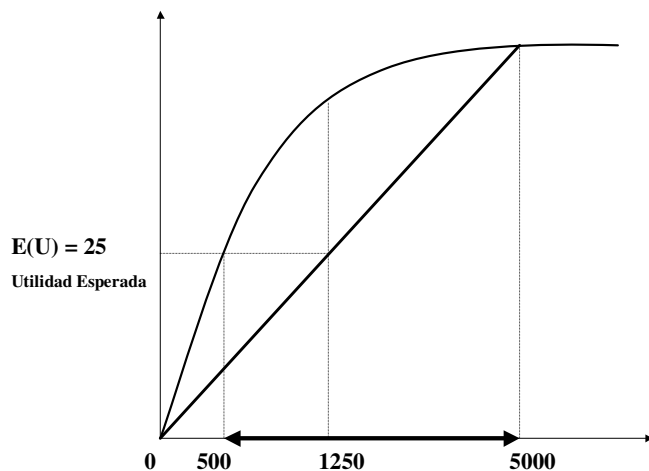
OJO: no es lo mismo haber calculado la utilidad asociada al ingreso esperado de \$2000 (estimada en 70), porque eso sería la utilidad del ingreso esperado y necesitamos calcular la utilidad esperada. Gráficamente:



- (c) Lo que debemos ofrecerle a esta persona por no aceptar este empleo es el ingreso cierto asociado a un mismo nivel de utilidad esperada. Este valor lo buscamos en la tabla, y como no existe ningún punto asociado a un nivel de utilidad de 45 lo estimamos: Sabemos que estará entre 40 y 60, asociado a un nivel de ingreso entre 1.0 y 1.6, digamos que a 45 le corresponde 1.2. Por lo tanto se le debe ofrecer 1200. Además tenemos que la diferencia entre 2000 y 1200 es el premio por riesgo. Vémoslo gráficamente:



- (d) Tengamos siempre en mente que es una persona aversa al riesgo. Debemos comparar los ingresos de la riqueza sin seguro y con seguro, luego la diferencia será lo que esté dispuesto a pagar por el seguro. Se debe tener cuidado que debo comparar ingresos ciertos, y no inciertos. Sin el seguro tendré una riqueza cierta de \$5000. Esto porque aunque la casa se me desplome, el seguro me compensará la pérdida, por lo tanto terminaré con \$5000. Sabemos que sin el seguro tendré un valor de la riqueza al final de:
- $$E(\text{riqueza sin seguro}) = 5000 \cdot 0.25 + 0 \cdot 0.75 = 1250$$
- Sin embargo no podríamos comparar este 1250 con el 5000 porque el primero se trata de un valor incierto, por lo tanto, buscamos el ingreso cierto asociado al mismo nivel de utilidad esperada. Calculamos la utilidad esperada:
- $$E(U \text{ sin seguro}) = U(5000) \cdot 0.25 + U(0) \cdot 0.75 = 100 \cdot 0.25 + 0 \cdot 0.75 = 25$$
- El nivel de ingreso (riqueza) cierta asociado a este nivel de utilidad es aproximadamente 500 (sabemos que el valor está entre 20 y 50, asociado a ingresos entre 0.4 y 1.0, suponemos que será 500). Gráficamente:



Por lo tanto lo que Elena, aversa al riesgo, pagará por el seguro es la diferencia entre el ingreso cierto con seguro y el ingreso cierto asociado al mismo nivel de utilidad esperada de la alternativa incierta. Es decir: $\$5000 - \$500 = \$4500$.

PREGUNTA 8: Control 2 2002

A continuación se presenta información sobre la utilidad de Pablo y Marcelo.

Ingresos	Utilidad de Pablo	Utilidad de Marcelo
0	0	0
100	200	512
200	300	640
300	350	672
400	375	678
500	387	681
600	393	683
700	396	684

- ¿Podría decir cuál de los dos individuos es más averso al riesgo? Explique
- Suponga que cada uno tienen \$400 y que tienen la posibilidad de emprender un negocio en el cual tienen que comprometer la totalidad de los \$400. Ellos saben que pueden recuperar \$600 con una probabilidad de 0,85 si el proyecto es exitoso, o \$200 si el proyecto fracasa. ¿Quién acepta el proyecto y quién prefiere quedarse con los \$400 iniciales?
- ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar cada uno por información que les permita conocer a priori el resultado del proyecto?

Respuestas:

- El más averso (para ingresos superiores a 100) es Marcelo, debido a que es el que “castiga” más la dispersión de los ingresos con una mayor disminución del nivel de utilidad. Si comparamos, por ejemplo la variación de la utilidad de cada uno entre ingresos de 200 y 300, vemos que para Pablo es 50 y para Marcelo 32. Es decir en el caso de Marcelo la utilidad disminuye más rápido que para Pablo cuando tenemos ingresos más dispersos.

(b) Veamos el caso de Pablo primero: Debemos comparar la utilidad asociada a no hacer el proyecto versus la utilidad esperada de hacer el proyecto. La utilidad de no hacerlo es la utilidad de quedarse con lo \$400, es decir 375 en el caso de Pablo.

La utilidad esperada es $E(U) = U(600)*0.85 + U(200)*0.15 \sim 377$

Como la utilidad esperada del proyecto es mayor que la de no hacerlo, Pablo prefiere hacerlo.

En el caso de Marcelo, la utilidad de no hacerlo (asociada a 400) es 678.

La utilidad esperada es $E(U) = U(600)*0.85 + U(200)*0.15 \sim 677$

Como la utilidad esperada del proyecto es menor que la de no hacerlo, Marcelo prefiere no hacerlo. Comprobamos que efectivamente Marcelo es más averso al riesgo que Pablo.

(c) Propuesta.