Departamento de Ingeniería Industrial
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
UNIVERSIDAD DE CHILE

IN 702 MICROECONOMIA II
Primavera 2006
Pauta Control 1

P1)

(a) Sea σ^* un equilibrio de Nash. Luego, $U_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq U_i(s_i, \sigma_{-i}^*)$ $\forall i \in I$, $\forall s_i \in S_i$.

Además, se cumple que $\sigma_i^* \in \Delta(BR_i(\sigma_{-i}^*))$.

Luego, tomando, $\sigma_{-i}^\varepsilon = \sigma_{-i}^*$, (que está bien definido porque las estrategias son estrictamente mixtas), se tiene que $\sigma_i^* \in \Delta(BR_i(\sigma_{-i}^\varepsilon))$ $\forall i \in I$, con $(\sigma_1^\varepsilon, ..., \sigma_n^\varepsilon) = \sigma^\varepsilon \to \sigma$ cuando $\varepsilon \to 0$.

Por lo tanto, σ^* es T.H.P. (3 pts)

(b) Los equilibrios de Nash en estrategias puras son (F, F) y (B, B).

Busquemos los equilibrios en estrategias mixtas:

Sea $\sigma_2 = (q, 1-q)$ con $q \in [0, 1]$, es decir, J_2 juega F con probabilidad q y B con probabilidad $1-q$. Luego,

$$\mathbb{E}[U_1(F)/\sigma_2] = 3q \qquad (1)$$
$$\mathbb{E}[U_1(B)/\sigma_2] = 2(1-q) = 2 - 2q \qquad (2)$$

Si $(1) = (2) \Rightarrow 3q = 2 - 2q \Rightarrow q = \frac{2}{5}$

Análogamente,

Sea $\sigma_1 = (p, 1-p)$ con $p \in [0,1]$, es decir, J_1 juega F con probabilidad p y B con probabilidad $1-p$. Entonces,

$$\mathbb{E}[U_1(C)/\sigma_2] = 2p \tag{3}$$
$$\mathbb{E}[U_1(R)/\sigma_2] = 3(1-p) = 3 - 3p \tag{4}$$

Si (3) = (4) $\Rightarrow 2p = 3 - 3p \Rightarrow p = \frac{3}{5}$

Luego, $\sigma_1^* = (3/5, 2/5)$ y $\sigma_2^* = (2/5, 3/5)$ es equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

(Insertar gráfico de forma extensiva)

Busquemos los equilibrios correlacionados:

	F	B
F	p_1	p_2
B	p_3	p_4

	F	B
F	3,2	0,0
B	0,0	2,3

Luego, se tiene que:

$\mathbb{E}[U_1] = 3p_1 + 0p_2 + 0p_3 + 2p_4 = 3p_1 + 2p_4$
$\mathbb{E}[U_2] = 2p_1 + 0p_2 + 0p_3 + 3p_4 = 2p_1 + 3p_4$

Pero, debe cumplirse que $\mathbb{E}[U_1] = E[U_2] \Rightarrow 3p_1 + 2p_4 = 2p_1 + 3p_4 \Rightarrow p_1 = p_4 \wedge p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$

Además, deben cumplirse las condiciones de no desvío del equilibrio correlacionado:

$$3p_1 \geq 2p_2 \tag{5}$$
$$2p_4 \geq 3p_3 \tag{6}$$
$$2p_1 \geq 3p_3 \tag{7}$$
$$3p_4 \geq 2p_2 \tag{8}$$
$$p_1 = p_4 \tag{9}$$
$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \tag{10}$$
$$p_i \geq 0 \ \forall i = 1, .., 4 \tag{11}$$

Por lo tanto, (p_1, p_2, p_3, p_4) será un equilibrio correlacionado si se cumplen las condiciones (5)-(11).

P3)

(a) La forma normal del juego será:

	C	R
C	0,0	3,2
R	2,3	1,1

(b) Los equilibrios de Nash en estrategias puras son (C, R) y (R, C).

Veamos los equilibrios en estrategias mixtas:

Sea $\sigma_2 = (q, 1-q)$ con $q \in [0,1]$, es decir, J_2 juega C con probabilidad q y R con probabilidad $1-q$. Luego,

$$\mathbb{E}[U_1(C)/\sigma_2] = 3(1-q) = 3 - 3q \tag{12}$$
$$\mathbb{E}[U_1(R)/\sigma_2] = 2q + (1-q) = 1 + q \tag{13}$$

Si (12) = (13) $\Rightarrow 2 = 4q \Rightarrow q = \frac{1}{2}$

Análogamente,

Sea $\sigma_1 = (p, 1-p)$ con $p \in [0,1]$, es decir, J_1 juega C con probabilidad p y R con probabilidad $1-p$. Entonces,

$$\mathbb{E}[U_1(C)/\sigma_2] = 3(1-p) = 3 - 3p \tag{14}$$
$$\mathbb{E}[U_1(R)/\sigma_2] = 2p + (1-p) = 1 + p \tag{15}$$

Si (14) = (15) $\Rightarrow 2 = 4p \Rightarrow p = \frac{1}{2}$

Luego, $\sigma_1^* = (1/2, 1/2)$ y $\sigma_2^* = (1/2, 1/2)$ es equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

(c) Sabemos que $Minmax = \text{mín}_{\alpha_{-i}}[\text{máx}_{\alpha_i} U(\alpha_i, \alpha_{-i})]$

Por lo tanto, para el jugador 1, $\text{mín}_q \text{máx}_{\alpha_1} U(\alpha_1, q) = \text{mín}_q\{3-3q, 1+q\} \Rightarrow\ q^* = 1/2$ y $\underline{\nu}_1 = 3/2$

Análogamente, para el jugador 2, $\text{mín}_p \text{máx}_{\alpha_2} U(\alpha_2, p) = \text{mín}_p\{3-3p, 1+p\} \Rightarrow\ p^* = 1/2$ y $\underline{\nu}_2 = 3/2$

Luego, el Minmax es $(\underline{\nu}_1, \underline{\nu}_2) = (3/2, 3/2)$

(d) Ahora, el juego es infinitamente repetido. Luego, los S.P.E. son todos los pagos que resulten de un equilibrio de Nash en el primer período y de una estrategia que lleve a alcanzar en los siguientes períodos una utilidad $\nu\ \underline{\nu}_1$, es decir, aquellas utilidades que se pueden obtener mediante un public random device que coordine las acciones de los jugadores, siempre y cuando le convenga al jugador 1.

En este caso, el menor pago del equilibrio de Nash estático es 3/2. El mejor es el equilibrio de Nash que da un pago de 3. Lo anterior es cierto para todos los factores de descuento.

(e) Jugar el equilibrio de Nash estático en cada período. Esto es, jugar el equilibrio de Nash (C,R) todos los períodos y si alguien se desvía, jugar el equilibrio de Nash mixto.