# MICROECONOMÍA II IN702


| | | |
|---|---|---|
| Profesor Cátedra | : | Felipe Balmaceda |
| Profesores Auxiliares | : | Paola Bordón, Gonzalo Cisternas |


## Pauta Tarea 1

**Problema 1 (Modelo de Cournot)**

Considere un mercado de $n$ firmas que compiten a la *Cournot*. Enfrentan una demanda inversa $P = P(Q)$ de clase $C^2$ donde $Q$ corresponde a la suma de las producciones de cada una de las firmas. La función de costos de la firma $i$, también de clase $C^2$, se ve afectada por un parámetro $\theta_i$, $C_i = C_i(q_i, \theta_i)$, y verifica $\frac{\partial C_i}{\partial \theta_i} > 0$, $\frac{\partial^2 C_i}{\partial q_i \partial \theta_i} > 0$, $i = 1,...,n$. Asuma que existe un único equilibrio ($q_i^*$: $i$= 1,...,n) que satisface $\{1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{P' + q_i P''}{C_i'' - P'}\} > 0$ y $C_i''(q_i^*) - P'(Q^*) > 0$ para todo $i = 1,...,n$.

**(i)** ¿Qué sistema debe resolver la asignación ($q_i^*$, $i$= 1,...,n) para constituir un equilibrio de Nash a la *Cournot*? Encuentre las condiciones de primer orden para cada firma $i = 1,...,n$.
**R:** Si ($q_i^*$: $i$= 1,...,n) es N.E. en estrategias de Cournot entonces debe resolver para todo $i = 1,..,n$:

$$\max_{q_i} \pi_i = P(Q)q_i - C_i(q_i, \theta_i)$$
$$Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$$

La C.P.O. de l firma $i$ es:

$$P'(Q)q_i + P(Q) - \frac{\partial C_i}{\partial q_i}(q_i, \theta_i) = 0 \tag{1}$$

**(ii)** Fije una firma cuyo subíndice denotamos $i$. Muestre que la producción total de equilibrio $Q^*$ cae cuando $\theta_i$ crece.
**R:** En lo que sigue, omitimos los supraíndices *. Derivando (1) para una firma $j$ con respecto a $\theta_i$ se llega a:

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta_i}[P''(Q)q_j + P'(Q)] + \frac{\partial q_j}{\partial \theta_i}[P'(Q) - \frac{\partial^2 C_j}{\partial^2 q_j}(q_j, \theta_j)] - \frac{\partial^2 C_j}{\partial q_j \partial \theta_i} 1_{\{i=j\}} = 0 \tag{2}$$

Dividiendo por -$[P'(Q) - \frac{\partial^2 C_j}{\partial^2 q_j}(q_j, \theta_j)]$ y sumando sobre $j$ desde 1 hasta $n$ se llega a:

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta_i}\{1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{P'(Q) + q_i P''(Q)}{C_i''(q_i) - P'(Q)}\} = -\frac{\frac{\partial^2 C_i}{\partial \theta_i \partial q_i}}{C_i''(q_i) - P'(Q)} \tag{3}$$

con $C_i'' = \frac{\partial^2 C_j}{\partial^2 q_j}(q_j, \theta_j)$, de donde se concluye.

**(iii)** Muestre que un aumento en $\theta_i$ aumenta (disminuye) la producción de una firma rival $j$ si la función de mejor respuesta de ésta es decreciente (creciente). **Hint**: Recuerde que tal función verifica $r_j = r_j(Q_{-j})$, donde $Q_{-j} = \sum_{i \neq j} q_i$.
**R:** En equilibrio se debe tener

$$q_j = r_j(Q - q_j) \tag{4}$$

Con $r_j$ la función de mejor respuesta de la firma $j$. Derivando con respecto a $\theta_i$ se obtiene:

$$\frac{\partial q_j}{\partial \theta_i} = r'(Q_{-j})[\frac{\partial Q}{\partial \theta_i} - \frac{\partial q_j}{\partial \theta_i}] \tag{5}$$

Si $r'(Q_{-j}) \geq 0$ se concluye que $\frac{\partial q_j}{\partial \theta_i} \leq 0$ (despejar $\frac{\partial q_j}{\partial \theta_i}$ y usar (ii)). Supongamos $r'(Q_{-j}) < 0$. Notemos que (1) puede ser escrita del siguiente modo (para una firma $j$):

$$P'(Q)r(Q_{-j}) + P(Q) - \frac{\partial C_j}{\partial q_j}(q_j, \theta_j) = 0 \tag{6}$$

y derivando con respecto a $Q_{-j}$ se llega a:

$$[2P'(Q) + q_j P''(Q) - C''_j(q_j)]r'(Q_{-j}) = -\{P'(Q) + q_j P''(Q)\} \tag{7}$$

El lado derecho de la ecuación anterior es distinto de cero: de lo contrario, por (2) (para una firma rival), $\frac{\partial q_j}{\partial \theta_i} = 0$ y por la ecuación (5) $r'(Q_{-j})\frac{\partial Q}{\partial \theta_i} = 0$, lo que es una contradicción. De modo que puede escribirse

$$r'(Q_{-j}) = -[\frac{P'(Q) + q_j P''(Q)}{2P'(Q) + q_j P''(Q) - C''_j(q_j)}] \tag{8}$$

Por lo que imponemos que la fracción en los corchetes debe ser positiva. Si el numerador es negativo, notando que $2P'(Q) + q_j P''(Q) - C''_j(q_j) = (P'(Q) + q_j P''(Q)) + (P'(Q) - C''_j(q_j))$, se tendrá que $r'(Q_{-j}) > -1$, y, usando (5) (despejar $\frac{\partial q_j}{\partial \theta_i}$) y (ii) se concluye. Si el numerador es positivo, entonces el denominador también debe serlo, pero esta expresión correponde a la condición de segundo orden que debe satisfacer $q_j$ para ser el óptimo de la firma rival $j$ (visto en clase auxiliar). De esto se deduce que $q_j$ sería un punto de mínimo, lo que es una contradicción. Luego el numerador es positivo y se termina la demostración.

**(iv)** Pruebe que las utilidades de las firmas rivales crecen a medida que $\theta_i$ aumenta.
**R:** Derivando $\pi_j$ con respecto a $\theta_i$:

$$\frac{\partial \pi_j}{\partial \theta_i} = P'(Q)\frac{\partial Q}{\partial \theta_i}q_j + P(Q)\frac{\partial q_j}{\partial \theta_i} - \frac{\partial C_j}{\partial q_j}(q_j, \theta_j)\frac{\partial q_j}{\partial \theta_i} \tag{9}$$

Usando (1) y notando que $Q = Q_{-j} + q_j$ se llega a:

$$\frac{\partial \pi_j}{\partial \theta_i} = \frac{\partial q_j}{\partial \theta_i}[P'(Q)q_j + P(Q) - \frac{\partial C_j}{\partial q_j}(q_j, \theta_j)] + P'(Q)\frac{\partial Q_{-j}}{\partial \theta_i}q_j = P'(Q)\frac{\partial Q_{-j}}{\partial \theta_i}q_j \tag{10}$$

Notemos que P'()< 0. Supongamos $\frac{\partial Q_{-j}}{\partial \theta_i} > 0$. Esto es equivalente a $\frac{\partial Q}{\partial \theta_i} > \frac{\partial q_j}{\partial \theta_i}$, y por (ii) entonces $\frac{\partial q_j}{\partial \theta_i} < 0$. Usando que

$$\frac{\partial q_j}{\partial \theta_i} = r'_j(Q_{-j})\frac{\partial Q_{-j}}{\partial \theta_i} \tag{11}$$

Lo que implica que $r'_j(Q_{-j})$ tiene el mismo signo que $\frac{\partial q_j}{\partial \theta_i}$ ($< 0$), llegando a una contradicción con (iii). Así $\frac{\partial Q_{-j}}{\partial \theta_i} < 0$, y por lo tanto, $\frac{\partial \pi_j}{\partial \theta_i} > 0$ (basta ver (10)).

**(v)** Establezca hipótesis adicionales para obtener que un aumento en $\theta_i$ provoca una disminución en el producto de la firma $i$ y, si las funciones de mejor respuesta del resto de las firmas son decrecientes, una baja en las utilidades de la misma firma.
**R:** Para lo primero usamos la ecuación (5) com $j = i$. Despejando se llega a:

$$\frac{\partial q_i}{\partial \theta_i} = \frac{\partial Q}{\partial \theta_i}[\frac{r'_i(Q_{-i})}{1 + r'_i(Q_{-i})}] \tag{12}$$

Como $\frac{\partial q_i}{\partial \theta_i} < 0$ basta imponer que $\frac{r'_i(Q_{-i})}{1+r'_i(Q_{-i})} > 0$.

Para lo segundo, tenemos que:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial \theta_i} = P'(Q)\frac{\partial Q}{\partial \theta_i}q_i + P(Q)\frac{\partial q_i}{\partial \theta_i} - \frac{\partial C_i}{\partial q_i}(q_i, \theta_i)\frac{\partial q_i}{\partial \theta_i} - \frac{\partial C_i}{\partial \theta_i}(q_i, \theta_i) \tag{13}$$

Usando que $Q = Q_{-i} + q_i$ y las condiciones de primer orden se deduce que:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial \theta_i} = P'(Q)\frac{\partial Q_{-i}}{\partial \theta_i}q_i - \frac{\partial C_i}{\partial \theta_i}(q_i, \theta_i) \tag{14}$$

Como la función de mejor respuesta de cada firma rival es decreciente, por (iii), $\frac{\partial q_j}{\partial \theta_i} > 0$ para todo $j \neq i$, y por lo tanto, $\frac{\partial Q_{-i}}{\partial \theta_i} > 0$. Usando que $\frac{\partial C_i}{\partial \theta_i} > 0$ se llega a:

$$P'(Q)\frac{\partial Q_{-i}}{\partial \theta_i}q_i < 0 < \frac{\partial C_i}{\partial \theta_i}(q_i, \theta_i) \tag{15}$$

y así $\frac{\partial \pi_i}{\partial \theta_i} < 0$ sin hipótesis adicionales.

**Problema 2 (Equilibrios de Nash)**

Considere un juego finito con I jugadores. Dada una estrategia $\sigma = (\sigma_i : i = 1, ..., n)$ se define el siguiente conjunto:

$$BR_i^P(\sigma) = \{a_i \,\epsilon\, A_i |\, u_i(a_i, \sigma_{-i}) \geq u(t_i, \sigma_{-i}),\ \forall t_i \,\epsilon\, A_i\}$$

**(i)** Muestre que la estrategia $\sigma^* = (\sigma_i^* : i = 1, ..., I)$ es equilibrio en estrategias puras si y sólo si $\sigma_i^*(BR_i^P(\sigma^*)) = 1$, para todo $i \,\epsilon\, I$.

**R:** $\sigma^* = (\sigma_i^*; i = 1, ..., n)$ es N.E si y sólo si:

$$\sigma_i^* = argmax\{u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*)|\ \sigma_i \,\epsilon\, \Delta_i\} \tag{16}$$

Condición necesaria: Sea $\sigma^*$ un N.E. en estrategias puras. Luego existe $a_i \,\epsilon\, A_i$ tal que $\sigma_i(a_i) = 1$ y $\sigma_i(a) = 0$, $\forall a \neq a_i$. Como $\sigma^*$ es N.E. se tiene que $u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*) \leq u_i(\sigma^*) = u_i(a_i, \sigma_{-i}^*)$, para toda estrategia $\sigma_i \,\epsilon\, \triangle_i$. En particular jugando $t_i \,\epsilon\, A_i$ con probabilidad 1. De esto se deduce que $a_i \,\epsilon\, BR_i^P(\sigma^*)$ y $\sigma_i^*(a_i) = 1$.

Suficiencia: Tomemos un individuo $i$. Existe entonces $a_i \,\epsilon\, BR_i^P(\sigma^*)$ tal que $\sigma_i^*(a_i) = 1$. Así, $u_i(a_i, \sigma_{-i}^*) \geq u_i(t_i, \sigma_{-i}^*)\ \forall\ t_i \,\epsilon\, A_i$. Consideremos otra estrategia $\hat{\sigma}_i$ para el individuo $i$. Se tiene entonces que:

$$u_i(\hat{\sigma}_i, \sigma_{-i}^*) = \sum_{t_i \epsilon A_i} \hat{\sigma}_i(t_i)u_i(t_i, \sigma_{-i}^*) \leq u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \tag{17}$$

Como esto se cumple para todo jugador $i$, se concluye que $\sigma^*$ es N.E. en estrategias puras.

**(ii)** Sea $\sigma^*$ un perfil de estrategias (no necesariamente puras) del juego mencionado. Muestre que las siguientes son equivalentes:

[**1** ] $\sigma^*$ es un equilibrio de Nash.

[**2** ] $\forall\ i \,\epsilon\, I, \forall\ a_i \,\epsilon\, A_i, u_i(\sigma^*) \geq u_i(a_i, \sigma_{-i}^*)$.

[**3** ] $\forall\ i \,\epsilon\, I, \forall\ a_i \,\epsilon\, A_i, [\sigma_i^*(a_i) > 0] \Rightarrow [a_i \,\epsilon\, BR_i^P(\sigma^*)]$.

**R:** [1] $\Rightarrow$ [2]: Directo por definición de N.E.

[2] $\Rightarrow$ [3]: Sea $\sigma^*$ una estrategia. Supongamos que para algún individuo $i$, $\exists\ a_i \,\epsilon\, A_i$, con $\sigma_i^*(a_i) > 0$ y $a_i$ no pertenece a $BR_i^P(\sigma^*)$. Luego existe $t_i \,\epsilon\, A_i$ tal que $u_i(t_i, \sigma_{-i}^*) > u_i(a_i, \sigma_{-i}^*)$. Como $A_i$ es finito podemos tomar $t_i$ en $BR_i^P(\sigma^*)$. De este modo se obtiene que:

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*) = \sum_{\bar{a}_i \,\epsilon\, A_i} \sigma_i^*(\bar{a}_i)u_i(\bar{a}_i, \sigma_{-i}^*) < u_i(t_i, \sigma_i^*) \tag{18}$$

donde la última desigualdad es estricta pues $t_i \,\epsilon\, BR_i^P(\sigma^*)$ y $a_i$ no pertenece a este conjunto. Esto contradice [2].

[3] $\Rightarrow$ [1]: Supongamos que tenemos [3]. El objetivo es probar que $\sigma^*$ es N.E. Para ellos tomemos un individuo i y una estrategia $\tilde{\sigma}_i$ cualquiera. Mostremos que $u_i(\tilde{\sigma}_i, \sigma_{-i}^*) \leq u_i(\sigma_i^*, \sigma_i^*)$. Sabemos que

$$u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) = \sum_{\sigma_i^*(a_i)>0} \sigma_i^*(a_i)u_i(a_i, \sigma_{-i}^*) \tag{19}$$

Por [3], si $\sigma_i^*(a_i) > 0$ entonces $a_i \in BR_i^P(\sigma^*)$ y de este modo, $u_i(a_i, \sigma_{-i}^*) \geq u_i(t_i, \sigma_{-i}^*)$ para cualquier acción $t_i$ de $i$. De esto se deduce que:

$$u_i(a_i, \sigma_{-i}^*) \geq \sum_{t_i \,\epsilon\, A_i} \tilde{\sigma}_i(t_i) u_i(t_i, \sigma_{-i}^*) \tag{20}$$

para todo $a_i$ tal que $\sigma_i^*(a_i) > 0$. Finalmente usando (19) se llega a que:

$$u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) = \sum_{\sigma_i^*(a_i)>0} \sigma_i^*(a_i) u_i(a_i, \sigma_{-i}^*) \geq \sum_{t_i \,\epsilon\, A_i} \tilde{\sigma}_i(t_i) u_i(t_i, \sigma_{-i}^*) = u_i(\tilde{\sigma}_i, \sigma_{-i}^*). \tag{21}$$

concluyéndose la demostración.

**(iii)** Muestre que si $\sigma^*$ es un equilibrio de Nash y $a_i,\ t_i \,\epsilon\, A_i$ son tales que $\sigma_i^*(a_i) > 0$ y $\sigma_i^*(t_i) > 0$, entonces, $u_i(a_i, \sigma_{-i}) = u_i(t_i, \sigma_{-i})$.

**R:** Directo de (ii): $\sigma^*$ N.E. $\Leftrightarrow$ [3]. Como $a_i$ y $t_i$ son tales que $\sigma_i^*(a_i) > 0$ y $\sigma_i^*(t_i) > 0$ entonces ambas están en $BR_i^P(\sigma^*)$ y de esto se deduce que $u_i(a_i, \sigma_{-i}^*) = u_i(t_i, \sigma_{-i}^*)$.

**Problema 3**. Considere el siguiente juego de dos personas:

| | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| $a$ | $5,4$ | $5,4$ |
| $b$ | $8,3$ | $1,9$ |
| $c$ | $3,6$ | $7,2$ |
| $d$ | $4,5$ | $6,3$ |

**(i)** Encuentre el set de equilibrios de Nash de este juego. ¿Cuáles de ellos son equilibrios perfectos (trembling hand perfect)?.

En el juego, no hay equilibrios de Nash en estrategias puras, pues ambos jugadores tienen incentivos unilaterales a desviarse:

$(a, a)$ no es E.N., ya que $J_1$ prefiere $b$ si $J_2$ juega a.
$(a, b)$ no es E.N., ya que $J_1$ prefiere $c$ si $J_2$ juega b.
$(b, a)$ no es E.N., ya que $J_2$ prefiere $b$ si $J_1$ juega b.
$(b, b)$ no es E.N., ya que $J_1$ prefiere $c$ si $J_2$ juega b.
$(c, a)$ no es E.N., ya que $J_1$ prefiere $b$ si $J_2$ juega a.
$(c, b)$ no es E.N., ya que $J_2$ prefiere $a$ si $J_1$ juega c.
$(d, a)$ no es E.N., ya que $J_1$ prefiere $b$ si $J_2$ juega a.
$(d, b)$ no es E.N., ya que $J_1$ prefiere $c$ si $J_2$ juega b.

Por lo tanto, no existen equilibrios de Nash en estrategias puras. Veamos los equilibrios en estrategias mixtas:

Sea $\sigma_2 = (p, 1-p)$ con $p \in [0, 1]$, es decir, $J_2$ juega $a$ con probabilidad $p$ y $b$ con probabilidad $1-p$. Luego,

$$E[U_1(a)/\sigma_2] = 5p + 5(1-p) = 5 \tag{22}$$
$$E[U_1(b)/\sigma_2] = 8p + 1(1-p) = 1 + 7p \tag{23}$$
$$E[U_1(c)/\sigma_2] = 3p + 7(1-p) = 7 - 4p \tag{24}$$
$$E[U_1(d)/\sigma_2] = 4p + 6(1-p) = 6 - 2p \tag{25}$$

Si $(1) = (2) \Rightarrow 5 = 1 + 7p \Rightarrow p = \frac{4}{7}$
Si $(1) = (3) \Rightarrow 5 = 7 - 4p \Rightarrow p = \frac{1}{2}$
Si $(1) = (4) \Rightarrow 5 = 6 - 2p \Rightarrow p = \frac{1}{2}$.

Dado lo anterior, analizaremos por casos:

- Si $p \in [0, \frac{1}{2}) \Rightarrow BR_1(\sigma_2(p)) = (0,0,1,0)$, pero si $J_1$ juega $c$, $BR_2((0,0,1,0)) = (1,0)$, que es el caso de la estrategia pura $(c,a)$ que no es equilibrio de Nash.
- Si $p = \frac{1}{2} \Rightarrow BR_1(\sigma_2(p)) = (1-x-y, 0, x, y)$ con $x, y \in [0,1]$. Adems, debe cumplirse que $BR_2(\sigma_1) = \sigma_2$, de otra forma:
  $E[U_2(a)] = E[U_2(b)]$
  $\Rightarrow (1-x-y)\cdot 4 + 0\cdot 3 + 6x + 5y = (1-x-y)\cdot 4 + 9\cdot 0 + 2x + 3y \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow \sigma_1 = (1,0,0,0)$.
  Luego, $\sigma_1^* = (1,0,0,0)$ y $\sigma_2^* = (1/2, 1/2)$ es equilibro de Nash en estrategias mixtas.
- Si $p \in [\frac{1}{2}, \frac{4}{7}) \Rightarrow BR_1(\sigma_2(p)) = (1,0,0,0)$. Pero, debe cumplirse que $BR_2(\sigma_1) = \sigma_2 = (p, 1-p)$. $E[U_2(a)] = E[U_2(b)] = 4$.
  Luego, $\sigma_1^* = (1,0,0,0)$ y $\sigma_2^* = (p, 1-p)$ es equilibro de Nash en estrategias mixtas.
- Si $p = \frac{4}{7}$, $BR_1(\sigma_2(p)) = (1-x, x, 0, 0)$ con $x \in [0,1]$. Adems, debe cumplirse que $BR_2(\sigma_1) = \sigma_2 = (p, 1-p)$.
  Pero, $E[U_2(a)] = E[U_2(b)] \Rightarrow 4(1-x) + 3x = 4(1-x) + 9x$
  $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow \sigma_1(1,0,0,0)$. Luego, $\sigma_1^* = (1,0,0,0)$ y $\sigma_2^* = (4/7, 3/7)$ es equilibrio de Nash en estrategias mixtas.
- Si $p \in (\frac{4}{7}, 1] \Rightarrow BR_1(\sigma_2(p)) = (0,1,0,0)$. Adems, debe cumplirse que $BR_2(\sigma_1) = \sigma_2 = (p, 1-p)$. Pero, $E[U_2(a)] = E[U_2(b)]\,(3 \neq 9)$, luego $(\sigma_1, \sigma_2)$ no es equilibro de Nash en estrategia mixta.

En resumen, los equilibrios de Nash en estrategias mixtas son:

$$\text{E.N.} = ((1,0,0,0), (p, 1-p)) \text{ con } p \in [\frac{1}{2}, \frac{4}{7}].$$

Ahora hay que ver los equilibrios de Nash en estrategias mixtas son THP.

Considere $\Sigma_1^\varepsilon = (1-3\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)$, luego $\Sigma_1^\varepsilon \to \sigma_1$ cuando $\varepsilon \to 0$.

$E[U_1(a)/\sigma_1^\varepsilon] = 4(1-3\varepsilon) + 3\varepsilon + 6\varepsilon + 5\varepsilon = 4 + 2\varepsilon$
$E[U_2(b)/\sigma_1^\varepsilon] = 4(1-3\varepsilon) + 9\varepsilon + 2\varepsilon + 5\varepsilon = 4 + 2\varepsilon$.
Luego, $U_2(\sigma_2, \sigma_1^\varepsilon) \geq U_2(a_i, \sigma_1^\varepsilon)\ \forall a_i \in A_i,\ \forall p \in [0,1]$, en particular si tomamos $p \in [1/2, 4/7]$.

Por lo tanto, para la ecuacin $\varepsilon^n = \frac{1}{n}$, $J_2$ elegir $\sigma_2 = (p, 1-p)$ cuando $J_1$ juegue $\sigma_1^{\varepsilon^n}$, es decir, todos los equilibrios de Nash en estrategias mixtas son equilibrios perfectos (THP).

**(ii)** Demuestre que la estrategia $d$ es aleatoriamente redundante cuando existe $\sigma_i \in \Delta(S_i)$, con $\sigma_i(S_i) = 0$ tal que $\forall s_{-i} \in S_{-i}, U_i(s_i, s_{-i}) = U_i(\sigma_i, s_{-i})$.
P.d.q. $\exists \sigma_i \in \Delta(S_i)$, con $\sigma_i(d) = 0$ tal que $U_i(d, s_{-i}) = U_i(\sigma_i, s_{-i})\ \forall s_{-i} \in S_{-i}$. Entonces, buscamos $\sigma_i = (1-x-y, x, y, 0)$ tal que

$$U_1(d,a) = U_1(\sigma_i, a) \tag{26}$$
$$U_2(d,b) = U_1(\sigma_i, b) \tag{27}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{De } (5): & 5(1-x-y) + 8x + 3y = 4 \\ \text{De } (6): & 5(1-x-y) + x + 3y = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0, y = \frac{1}{2}.$$

Luego, $\exists \sigma_i = (1/2, 0, 1/2, 0)$, que cumple que $\sigma_i(d) = 0$ y que $U_1(d, s_{-i}) = U_1(\sigma_i, s_{-i})\ \forall s_{-i} \in S_{-i}$ y por lo tanto, la estrategia $d$ es aleatoriamente redundante.

**(iii)** Considere la forma reducida despus de eliminar la estrategia $d$. Cules de los nuevos equilibrios son THP? Explique el porqu de la diferencia con (i) si es que la hay.

La forma reducida ser:

| | a | b |
|---|---|---|
| a | 5,4 | 5,4 |
| b | 8,3 | 1,9 |
| c | 3,6 | 7,2 |

Anlogo al caso (i). En el caso (i), la estrategia $d$ era mejor respuesta cuando $p = 1/2$, pero $y = 0$, es decir, de todos modos no se jugaba $d$. As, los equilibrios de Nash son los mismos que en el juego original:

$$\text{E.N.} = ((1,0,0,0),(p,1-p)) \text{ con } p \in [\frac{1}{2},\frac{4}{7}].$$

Veamos si son perfectos:
Considere $\Sigma_1^\varepsilon = (1-2\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon)$,
$E[U_2(a)/\sigma_1^\varepsilon] = 4(1-2\varepsilon)+3\varepsilon+6\varepsilon = 4+\varepsilon$
$E[U_2(b)/\sigma_1^\varepsilon] = 4(1-2\varepsilon)+9\varepsilon+2\varepsilon = 4+3\varepsilon$
luego, cuando $\varepsilon \to 0$, $\sigma_1 = (1,0,0)$ y se tiene que $\sigma_2 = (p,1-p) \in BR_2(\sigma_1^\varepsilon)$ $\forall p \in [1/2,4/7]$. Por lo tanto, todos los equilibrios de Nash son aleatoriamente redundantes.

**P4 a)** Edgeworth duopoly con capacidad constante $K$, $q = 100-p$.

- Si $p_1 < p_2 \Rightarrow q_1 = \min(100-p_i,K)$, $U_1(p_1,p_2) = (p_1-10)\min(100-p_1,K)$.
- Si $p_1 = p_2 \Rightarrow q_1 = q_2 = \min\left(\frac{100-p_1}{2},K\right)$, $U_1(p_1,p_2) = (p_1-10)\min\left(50-\frac{p_1}{2},K\right)$, (ambos se reparten el mercado).
- $p_1 > p_2 \Rightarrow$

$$q_1 = \begin{cases} \min(100-K-p_1,K) & \text{si la firma 2 no alcanza a satisfacer la demanda.} (100-K-p_1>0) \\ 0 & \text{si la firma 2 satisface toda la demanda.} \end{cases}$$

$$U_1 = \begin{cases} (p_1-10)\min(100-K-p_1,K) & \text{si } p_1 > p_2, p_1 < 100-k. \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Anlogo para $U_2$.

**b)** Suponga que $30 < K < 45$. P.d.q. en este juego no existe un equilibrio de Nash en estrategias puras.

(i) Supongamos $(p_1,p_2)$ es E.N.
Si $p_1 > p_2 \Rightarrow U_1(p_1,p_2) = (p_1-10)\min(100-K-p_1,K)$,
$U_2(p_1,p_2) = (p_2-10)\min(100-p_2,K)$.
Pero, si la firma 2 sube $p_2$ a $p_2+\varepsilon$ (con $\varepsilon$ tan chico como se quiera) la firma 2 sigue vendiendo $K$. Esto implica entonces que la firma 2 tiene incentivos a subir el precio, y $(p_1,p_2)$ con $p_1 > p_2$ no es E.N. Por simetra, $p_2 > p_1$ tampoco es E.N. Por lo tanto, si $(p_1,p_2)$ es un E.N: puro, necesariamente $p_1 = p_2$.

(ii) P.d.q. si $(p,p)$ es E.N: puro $\Rightarrow p > 10$.
Si $p_1 = p_2 \leq 10 \Rightarrow U_i \leq 0$. As, ambas firmas tienen incentivos a subir los precios de manera de aumentar sus utilidades (o disminuir sus prdidas).
Si la firma 1 sube el precio a $p_1+\varepsilon$, con $\varepsilon$ chico, $U_1(p_1+\varepsilon,p_2) > U_1(p_1,p_2)$, por lo tanto, $p_1 = p_2 \leq 10$.

(iii) P.d.q. si $(p,p)$ es E.N: puro $\Rightarrow p \leq 100-2K$.
Supongamos que $p > 100-2K \Rightarrow \frac{100-p}{2} \Rightarrow q_1 = q_2 = 50-\frac{p}{2}$, ya que $p_1 = p_2 = p$ y $p > 100-2k$.

Veamos que ocurre si la firma 1 baja el precio $p_1 > p$:
a) $p_1 = p-\varepsilon$ t.q. $100-p_1 \geq k \Rightarrow U_1' = (p_1-10)K \Rightarrow (p-10)K - \varepsilon K > U_1 - \varepsilon K$
Si tomamos un $\varepsilon$ tan chico como se quiera, $U_1' > U_1$.
b) $p_1 = p-\varepsilon$ tal que $100-p_1 < K$
$u_1' = (p_1-10)(100-p_1) = (p-\varepsilon-10)(100-p+\varepsilon) = 2U_1+\varepsilon(2p-110)+\varepsilon^2$, si $\varepsilon$ es chico $\Rightarrow U_1' > U_1$.

En ambos casos, $p_1 = p_2 > 100-2K$ no es E.N. Luego, si $p_1 = p_2$ es E.N. puro, necesariamente $p_1 = p_2 < 100-2K$.

(iv) P.d.q. si $(p,p)$ es E.N: puro $\Rightarrow p = 100 - 2K$.
Si $p < 100 - 2k \Rightarrow K > 50 - \frac{p_1}{2}$. Luego, $U_1 = (p-10)K$.
Si la firma 1 sube el precio en $\varepsilon \Rightarrow p_1 = p + \varepsilon$, hay que analizar dos casos:

1. $100 - K - p_1 < K \Rightarrow U_1' = (p_1 - 10)(100 - K - p_1) = (p + \varepsilon - 10)(100 - K - p - \varepsilon) = (p-10)(100 - K - p) - \varepsilon(p - 10 - 100 + K + p) - \epsilon^2$
pero, $p < 100 - 2K \Rightarrow 100 - p > 2k$. Luego, $U_1' \geq K(p-10) + \varepsilon(100 - K - p - p - \varepsilon + 10)$ tomando $\varepsilon$ tan chico como se quiera.
2. Si $100 - K - p_1 > K \Rightarrow U_1' = p_1 K > pK$ pues si $p_1 > p$ lo anterior implica que si $p > 100 - 2K$, la firma 1 (simtrico para la firma 2) tiene incentivos unilaterales a subir el precio para obtener utilidad.
Por lo tanto, si $(p,p)$ es E.N. puro, entonces necesariamente $p = 100 - 2K$.

(v) P.d.q. como $K > 30 \Rightarrow \exists \delta > 0$ t.q. $p = 100 - 2K + \delta$ siene mayor utilidad que $100 - 2K$ cuando la otra firma cobra $100 - 2K$
Supongamos $(p,p)$ con $p = 100 - 2k$. Luego, $U_1 = (100 - 2k - 10)K$. Si la firma 1 sube el precio en $\varepsilon \Rightarrow p_1 = p + \varepsilon$.
Luego, $U_1' = (p_1 - 10)\min(100 - K - p_1, K)$. Pero, $p_1 > 100 - 2K$ y $p = 100 - 2K \Rightarrow 100 - K - p_1 > K$.
Entonces, $U_1' = (100 - K - p_1)(p_1 - 10) = (100 - K - p + \varepsilon)(p + \varepsilon - 10) = K(90 - 2K) - \varepsilon(90 - 3K + \varepsilon)$.
Para que $U_1 > u_1$, $90 - 3K + \varepsilon < 0 \Rightarrow \varepsilon < 3K - 90, \varepsilon > 0$ pues $K > 30$. Tomando $\varepsilon = \delta$, q.e.d.

**P5** El primer problema fue resuelto en clase auxiliar.

jEncuentre los equilibrios correlacionados de la figura 2.5.

| | L | R | | L | R | | L | R |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| U | (0,1,3) | (0,0,0) | U | (2,2,2) | (0,0,0) | U | (0,1,0) | (0,0,0) |
| D | (1,1,1) | (1,0,0) | D | (1,1,1) | (2,2,2) | D | (1,1,0) | (1,0,3) |
| | A | | | B | | | C | |

Las acciones son:

$J_1$ elige filas $(U, D)$
$J_2$ elige columnas $(L, R)$
$J_3$ elige matrices $(A, B, C)$

Notamos que el nico equilibrio de Nash en estrategias puras es $(D, L, A)$.

Definimos

$$\begin{array}{lll} p_1 = p(U,L,A) & r_1 = p(U,L,B) & s_1 = p(U,L,C) \\ p_2 = p(U,R,A) & r_2 = p(U,R,B) & s_2 = p(U,R,C) \\ p_3 = p(D,L,A) & r_3 = p(D,L,B) & s_3 = p(D,L,C) \\ p_4 = p(D,R,A) & r_4 = p(D,R,B) & s_4 = p(D,R,C) \end{array}$$

Los equilibrios correlacionados debern cumplir que para todo jugador $i$,

$$\sum_{s_{-i} \in S_{-i}} p(s_{-i}/s_i) U_i(s_{-i}, s_{-i}) \geq \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} p(s_{-i}/s_i) U_i(s_i', s_{-i}) \, \forall s_i' \in S_i$$

- Si al jugador 1 le recomiendan jugar U, juega $u$ cuando se cumple que:

$$\frac{p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot 0 + 2r_1 + 0 \cdot r_2 + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2}{p_1 + p_2 + r_1 + r_2 + s_1 + s_2} \geq \frac{p_1 + p_2 + 2r_1 + 2r_2 + s_1 + s_2}{p_1 + p_2 + r_1 + r_2 + s_1 + s_2}.$$

Sea $a = p(U) = p_1 + p_2 + r_1 + r_2 + s_1 + s_2 \Rightarrow \frac{1}{a}(p_1 + p_2 + r_1 + r_2 + s_1 + s_2) \leq 0$. Pero, como $p_i, r_i$ y $s_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^4 p_i + \sum_{i=1}^4 r_i + \sum_{i=1}^4 s_i = 1$

$$\Rightarrow p_1 = p_2 = r_2 = s_1 = s_2 = 0 \tag{28}$$

- Jugador 1 le recomiendan jugar D, Juega D si:
  Sea $b = p(D) = p_3 + p_4 + r_3 + r_4 + s_3 + s_4 \Rightarrow$
$$\frac{p_3 + p_4 + 2r_3 + 2r_4 + s_3 + s_4}{b} \geq \frac{2r_3}{b}$$
$$\Rightarrow p_3 + p_4 + 2r_4 + s_3 + s_4 \geq 0,$$
  que siempre se cumple pues $p_i, r_i, s_i \geq 0, i \in \{1, .., 4\}$.

- Al jugador 2 le recomiendan jugar L, entonces juega l cuando se cumple:
  Sea $c = p(L) = p_1 + p_3 + r_1 + r_3 + s_1 + s_3 > 0 \Rightarrow$
$$\frac{p_1 + p_3 + 2r_1 + 2r_3 + s_1 + s_3}{c} \geq \frac{2r_3}{c}$$
$$\Rightarrow p_1 + p_3 + 2r_1 + s_1 + s_3 \geq 0,$$
  que siempre se cumple pues $p_i, r_i, s_i \geq 0, i \in \{1, .., 4\}$.

- Al jugador 2 se le recomienda jugar $R$, entonces juega R cuando:
  Sea $d = p(R) = p_2 + p_4 + r_2 + r_4 + s_2 + s_4 > 0 \Rightarrow$
$$\frac{p_2 + p_4 + 2r_2 + 2r_4 + s_2 + s_4}{d} \leq \frac{2r_4}{b}$$
$$\Rightarrow p_2 + p_4 + 2r_2 + s_2 + s_4 \geq 0$$
$$\Rightarrow p_2 = p_4 = r_2 = s_2 + s_4 = 0 \tag{29}$$

- Al jugador 3 le recomiendan jugar A, entonces juea A cuando:
  $\rightarrow$ Para que no se desve a B
$$\Rightarrow p_1 + p_3 \geq 2p_4 \tag{30}$$
  $\rightarrow$ Para que no se desve a C
$$\Rightarrow 3p_1 + p_3 \geq 3p_4 \tag{31}$$

- Si al jugador 3 le recomiendan jugar $B$, entonces juega B:
  $\rightarrow$ Para que no se desve a A:
$$2r_4 \geq r_1 + r_3 \tag{32}$$
  $\rightarrow$ Para que no se desve a C:
$$2r_1 \geq r_4 \tag{33}$$

- Si al jugador 3 le recomiendan jugar $C$, entonces juega C:
  $\rightarrow$ Para que no se desve a A:
$$3s_4 \geq 3s_1 + s_3 \tag{34}$$
  $\rightarrow$ Para que no se desve a B:
$$s_4 \geq 2s_1 \tag{35}$$

Por lo tanto, $(p_1, p_2, p_3, p_4, r_1, r_2, r_3, r_4, s_1, s_2, s_3, s_4)$ ser un equilibrio correlacionado si se cumplen(28)-(35) y si $\sum_{i=1}^{4} p_i + \sum_{i=1}^{4} r_i + \sum_{i=1}^{4} s_i = 1$ con $p_i, r_i, s_i \geq 0, i \in \{1, .., 4\}$.