



### PREGUNTA 1

En el año 2005, después de años de fusiones entre conglomerados, sólo 2 grandes conglomerados quedan en la Bolsa de Comercio de Nueva York. Por conveniencia, llamaremos a estas firmas A y B. Cada una aporta con la mitad de la riqueza en el portafolio de mercado. Se han dado los siguientes datos:

	Firma A	Firma B
Tasa de retorno esperada	23%	13%
Desviación estándar del retorno (por año)	40%	24%

El coeficiente de correlación entre A y B es  $\rho_{AB} = 0.8$

a) ¿Cuál es la tasa de retorno esperado del portafolio de mercado ( $r_m$ )?

R:

Del enunciado  $w_1 = w_2 = 0.5$

Luego  $\bar{r}_m = w_a \cdot \bar{r}_a + w_b \cdot \bar{r}_b = 0.5 \cdot 0.23 + 0.5 \cdot 0.13 = 0.18 = 18\%$

b) ¿Cuál es la desviación estándar del portafolio de mercado ( $\sigma_m$ )?

R:

Usamos que:  $\sigma_m^2 = w_a^2 \cdot \sigma_a^2 + w_b^2 \cdot \sigma_b^2 + 2 \cdot w_a \cdot w_b \cdot \sigma_a \cdot \sigma_b \cdot \rho_{ab} = 0.0928$   
 $\Rightarrow \sigma_m = 30.46\%$

c) ¿Cuáles son los betas de las firmas A y B?

R:

De la definición de beta, y recordando las propiedades bi-lineales de la covarianza de dos variables aleatorias  $r_a$  y  $r_m$ :

$$\beta_a = \frac{\sigma_{am}}{\sigma_m^2}$$

$$\text{pero } \sigma_{am} = \text{cov}(r_a, r_m) = \text{cov}(r_a, w_a \cdot r_a + w_b \cdot r_b) = w_a \cdot \text{cov}(r_a, r_a) + w_b \cdot \text{cov}(r_a, r_b)$$

$$\Rightarrow \sigma_{am} = 0.5 \cdot \sigma_a^2 + 0.5 \cdot \sigma_a \cdot \sigma_b \cdot \rho_{ab} = 0.1184$$

$$\Rightarrow \beta_a = \frac{0.1184}{0.0928} = 1.276$$

Para calcular beta de la empresa b, se puede realizar el mismo procedimiento anterior, o notar que:

$$\sigma_m^2 = \sum_i w_i \cdot \sigma_{im} \Leftrightarrow 1 = \sum_i w_i \cdot \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} = \sum_i w_i \cdot \beta_i$$

$$\text{luego: } 1 = w_a \cdot \beta_a + w_b \cdot \beta_b \Rightarrow \beta_b = \frac{1 - w_a \cdot \beta_a}{w_b} = 0.724$$

d) Asumiendo que la tasa libre de riesgo es del 10%. ¿Son las tasas de retornos esperadas de A y B consistentes con CAPM?

R:

CAPM  $\Rightarrow \bar{r}_i = r_f + \beta_i \cdot (\bar{r}_m - r_f)$  retorno esperado del activo i.

Luego, reemplazando con los datos anteriores:

$$r_a = 20.2\%$$

$$r_b = 15.79\%$$

No es coherente con los datos del problema. Luego, probablemente el que calculó los datos del problema no lo hizo con CAPM (usó otro método, tipo media de datos históricos).

## PREGUNTA 2

Suponga que Ud observa una economía con sólo 2 activos riesgosos: A y B

De acuerdo a sus estimaciones la volatilidad de A es 10 % anual, mientras que la volatilidad de B es 20% anual. El retorno esperado de A es 15%, mientras que el retorno esperado de B es 9%. Si la tasa libre de riesgo es 5%, y si en equilibrio Ud. Observa que los agentes invierten el doble en el activo A que en el activo B, se pide:

a) Calcule el beta de A y el beta de B

R:

Por enunciado  $w_A = 2/3$ ;  $w_B = 1/3$

$$\text{CAPM: } \Rightarrow \bar{r}_i = r_f + \beta_i \cdot (\bar{r}_m - r_f) \Rightarrow \beta_i = \frac{(\bar{r}_i - r_f)}{(\bar{r}_m - r_f)} \Rightarrow \text{Falta } r_m$$

Como hay 2 activos en la economía:

$$\Rightarrow r_m = w_A \cdot r_A + w_B \cdot r_B = 10\% \Rightarrow \beta_A = 1,25 \text{ y } \beta_B = 0,5$$

b) ¿Cuánto es el coeficiente de correlación entre el activo A y el activo B?

R:

$$\beta_i = \frac{\text{Cov}(r_i, r_m)}{\text{Var}(r_m)} = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} \Rightarrow \text{¿Cov}(r_A, r_m), \text{Cov}(r_B, r_m), \text{Var}(r_m)?$$

Cartera formada por A y B  $\rightarrow$

$$\sigma_m^2 = w^2 \cdot \sigma_A^2 + (1-w)^2 \cdot \sigma_B^2 + 2 \cdot w \cdot (1-w) \cdot \sigma_{AB}$$

Sabemos que

$$\sigma_{Am} = E(r_A \cdot r_m) - E(r_A) \cdot E(r_m) \text{ y } r_m = w \cdot r_A + (1-w) \cdot r_B$$

$$\Rightarrow \sigma_{Am} = w \cdot E(r_A^2) + (1-w) \cdot E(r_A \cdot r_B) - E(r_A) \cdot E(r_m)$$

Como

$$\sigma_A^2 = E(r_A^2) - E(r_A)^2$$

$$\sigma_{AB} = E(r_A \cdot r_B) - E(r_A) \cdot E(r_B)$$

$$\Rightarrow \sigma_{Am} = w \cdot \sigma_A^2 + w \cdot E(r_A)^2 + (1-w) \cdot [\sigma_{AB} + E(r_A) \cdot E(r_B)] - E(r_A) \cdot E(r_m)$$

y como sabemos que

$$\sigma_{Am} = \beta_A \cdot \sigma_m^2$$

$$\Rightarrow \beta_A \cdot \sigma_m^2 = w \cdot \sigma_A^2 + w \cdot E(r_A)^2 + (1-w) \cdot [\sigma_{AB} + E(r_A) \cdot E(r_B)] - E(r_A) \cdot E(r_m)$$

Despejando  $\text{Cov}(r_A, r_B)$  y reemplazando con datos:

$$\text{Cov}(R_A, R_B) = 0,0469$$

### PREGUNTA 3

Suponga que en una economía donde aplica el CAPM la tasa libre de riesgo es 6%, el retorno de la cartera de mercado es 10%, su volatilidad es 9%, y para los activos A y B. Los datos son:

	Retorno exigido	Volatilidad	Correlaciones	
			A	B
A	12%	8%	1	0,5
B	18%	6%	0,5	1

a) Determine el beta de A y el beta de B

$$\beta_A = \frac{r_A - r_f}{r_m - r_f} = \frac{6}{4} = 1,5$$

$$\beta_B = \frac{12}{4} = 3$$

b) Determine el beta de la cartera de mercado

Por definición  $\beta_m = \frac{\sigma_{mm}}{\sigma_m^2} = 1$

c) Construya una cartera C, a partir del activo A y B que tenga  $\beta=0$  y cuyo retorno esperado sea igual a la tasa libre de riesgo.

Si  $C = A \cdot x + B \cdot y$ , queremos encontrar x e y tal que:

$$1) x \cdot r_A + y \cdot r_B = 6\%$$

$$2) x \cdot \beta_A + y \cdot \beta_B = 0 \quad \Rightarrow x=2 \text{ e } y=-1$$

Es decir, se vende del activo B y se compran dos del activo A.

### PREGUNTA 4

Sea una cartera de activos de la siguiente manera:

	Retorno esperado	volatilidad
A	12%	15%
B	20%	45%

Con A y B correlacionados en un 0,8.

Además le ofrecen un bono que tiene una rentabilidad de un 5%, libre de riesgo.

a) Suponga que Usted invierte en una cartera C que tiene un 50% de A y un 50% de B. Encuentre el retorno esperado y la varianza de dicha cartera.

$$R_c = 0.5 \cdot 10\% + 0.5 \cdot 18\% = 14\%$$

$$\sigma_c^2 = 0.5^2 \cdot 10\%^2 + 0.5^2 \cdot 30\%^2 + 2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \cdot 15\% \cdot 30\% \cdot 0.1 \Leftrightarrow \sigma_c = 17.43\%$$

b) Argumente si C es o no un punto sobre la frontera eficiente.

Se debe encontrar:

$$\min \sigma_w^2 = w^2 \sigma_A^2 + (1-w)^2 \sigma_B^2 + 2w(1-w) \rho_{AB} \sigma_A \sigma_B$$

$$\text{Con lo que: } w^* = 82.61\%, R_w^* = 11.39\%, \sigma_w^* = 13.92\%$$

Como  $R_c > R_{\min}$ , entonces C es un punto de la frontera eficiente.

c) Argumente si A y B son puntas sobre la frontera eficiente de carteras.

A no es punta dado que  $R_A < R_{\min}$ , se puede obtener una mayor rentabilidad a un mismo riesgo, B sí lo es.

c) Determine el coeficiente de correlación entre la cartera C y el activo A.

$$\rho_{R_c, R_A} = \frac{COV[R_c, R_A]}{\sigma_{R_c} \sigma_{R_A}} = \frac{E[R_c * R_A] - E[R_c]E[R_A]}{\sigma_{R_c} \sigma_{R_A}}$$

Pero

$$R_c = 0.5 \cdot R_A + 0.5 \cdot R_B$$

Por lo tanto, se tiene:

$$\rho_{R_c, R_A} = \frac{E[0.5R_A^2 + 0.5R_B R_A] - E[R_c]E[R_A]}{\sigma_{R_c} \sigma_{R_A}} = \frac{0.5E[R_A^2] + 0.5E[R_B R_A] - E[R_c]E[R_A]}{\sigma_{R_c} \sigma_{R_A}}$$

Y se tiene que:

$$E[R_A^2] = V[R_A] + E^2[R_A] = 0.0325$$

Además:

$$\rho_{R_A, R_B} = \frac{COV[R_A, R_B]}{\sigma_{R_A} \sigma_{R_B}} \Leftrightarrow COV[R_A, R_B] = 0.0045$$

$$E[R_A * R_B] = COV[R_A, R_B] + E[R_A]E[R_B] = 0.0225$$

Finalmente:

$$\rho_{R_c, R_A} = \frac{0.5 * 0.0325 + 0.5 * 0.0225 - 0.14 * 0.1}{0.1743 * 0.15} \approx 0.516$$