Problema 1

Encuentre los equilibrios de Nash del siguiente juego de dos personas:

	a	b
a	5,4	5,4
b	8,3	1,9
c	3,6	7,2
d	4,5	6,3

Problema 3

i) Primero que nada recordemos que en un equilibrio de Nash de estrategias mixtas σ_i^* si un jugador i asigna probabilidad positiva a una estrategia s_i^j entonces s_i^j es mejor respuesta a σ_{-i}^*

($a_i \in A_i$ es mejor respuesta a σ_{-i} si $u_i(a_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(a_i', \sigma_{-i}) \quad \forall a_i' \in A_i$)

Esto implica también que en un EN si un jugador asigna probabilidad positiva a más de una estrategia, estas estrategias tendrán la misma utilidad (dado σ_{-i}^*).

Veamos que en el juego no hay estrategias puras que son E.N.

(a,a) no es EN pues 1 prefiere b si 2 juega a
(a,b) no es EN pues 1 prefiere c si 2 juega b
(b,a) no es EN pues 2 prefiere b si 1 juega b
(b,b) no es EN pues 1 prefiere c si 2 juega b
(c,a) no es EN pues 1 prefiere b si 2 juega a
(c,b) no es EN pues 2 prefiera a si 1 juega c
(d,a) no es EN pues 1 prefiere b si 2 juega a
(d,b) no es EN pues 1 prefiere c si 2 juega b

Busquemos equilibrios mixtos. Si 2 juega $\sigma_2 = (p, 1-p)$

$\mathbb{E}(u_1(a)) = 5 \cdot p + (1-p) \cdot 5 = 5$

$\mathbb{E}(u_1(b)) = 8p + (1-p) = 1+7p$

$\mathbb{E}(u_1(c)) = 3p + 7(1-p) = 7-4p$

$\mathbb{E}(u_1(d)) = 4p + 6(1-p) = 6-2p$

Calculemos la mejor respuesta de 1 a σ_2

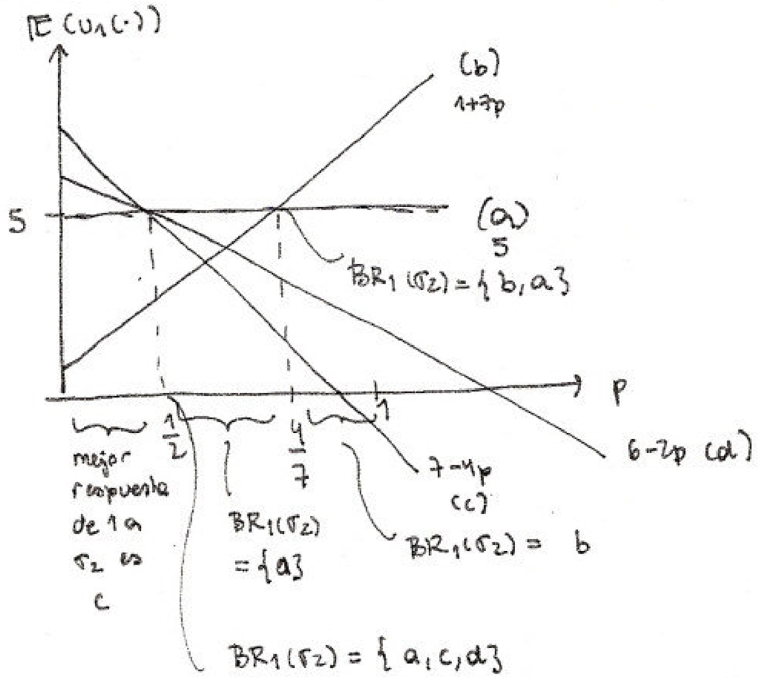
igualo b y d $\quad 1+7p = 6-2p \Rightarrow 9p=5 \Rightarrow p=\frac{5}{9}$

pero $\quad 1+7\cdot\frac{5}{9} = 1+\frac{35}{9} < 5$ ✗ (b y d no es mejor respuesta a $p=\frac{5}{9}$)

igualo b y c $\quad 7-4p = 1+7p \Rightarrow 11p=6 \quad p=\frac{6}{11} \quad 1+7p = 1+\frac{42}{11} < 5$ no sirve

igualo c y d $\quad 7-4p = 6-2p \Rightarrow 2p=1 \quad p=\frac{1}{2} \quad 7-4p = 5$

De aquí podemos deducir que las utilidades esperadas se de las alternativas de juego para 1 se comportan de la siguiente forma en función de p



Con esto, resulta interesante analizar los siguientes casos

a) $p=0$ mejor respuesta de 1 a σ_2 es c

b) $p \in (0, \frac{1}{2})$ $BR_1(\sigma_2(p)) = "c" = (0,0,1,0)$

c) $p = \frac{1}{2}$ $BR_1(\sigma_2(p)) = \{a, c, d\} = (1-\alpha-\beta, 0, \alpha, \beta)$ con $\alpha, \beta \in [0,1]$

d) $p \in (\frac{1}{2}, \frac{4}{7})$ $BR_1(\sigma_2(p)) = a = (1,0,0,0)$

e) $p = \frac{4}{7}$ $BR_1(\sigma_2(p)) = \{a, b\} = (1-\alpha, \alpha, 0, 0)$ con $\alpha \in [0,1]$

f) $p \in (\frac{4}{7}, 1)$ $BR_1(\sigma_2(p)) = b = (0,1,0,0)$

g) $p=1$ $BR_1(\sigma_2(p)) = b = (0,1,0,0)$

Caso a)

para que $(\overbrace{(0,0,1,0)}^{\sigma_1}, \overbrace{(0,1)}^{\sigma_2})$ sea EN se debe cumplir que

$BR_2((0,0,1,0)) = (0,1)$

(Notar que como c es mejor respuesta a $\sigma_2 = (0,1)$ sabemos que $BR_1((0,1)) = (0,0,1,0)$)

Esto no se cumple pues $BR_2((0,0,1,0)) = (1,0)$

Notar también que en este caso (σ_1, σ_2) corresponden a una estrategia pura y ya vimos que no había EN en estrategias puras

Caso c) Sabemos que si $\sigma_2 = (p, 1-p)$ con $p = \frac{1}{2}$

$BR_1(\sigma_2) = (1-\alpha-\beta, 0, \alpha, \beta) = \sigma_1$ con $\alpha, \beta \in [0,1]$

Veamos si se cumple que $BR_2(\sigma_1) = \sigma_2$

Para que 2 juegue una estrategia mixta se deberá cumplir que

$\mathbb{E}(u_2(a)) = \mathbb{E}(u_2(b))$ (ver comentario inicial)

Veamos para qué valores de α y β esto se puede cumplir lo anterior

$\mathbb{E}(u_2(a)) = (1-\beta-\alpha)\,4 + 0\cdot 3 + \alpha\cdot 6 + \beta\cdot 5 = 4+2\alpha+\beta$

$\mathbb{E}(u_2(b)) = (1-\beta-\alpha)\cdot 4 + 9\cdot 0 + 2\alpha + 3\beta = 4-2\alpha-\beta$

$\mathbb{E}(u_2(a)) = \mathbb{E}(u_2(b)) \Rightarrow \alpha=\beta=0$

Luego hemos encontrado un EN que corresponde a

$((1,0,0,0),\ (\frac{1}{2},\frac{1}{2}))$

<u>Caso b)</u> $\sigma_2 = (p, 1-p)$ con $p \in (0, \frac{1}{2})$

$BR_1(\sigma_2) = (0,0,1,0) = \sigma_1$

Para que $BR_2(\sigma_1) = \sigma_2$ se debe cumplir que

$\mathbb{E}(u_2(a)) = 6 = \mathbb{E}(u_2(b)) = 2$ $(\to\leftarrow)$

$\Rightarrow (\sigma_1, \sigma_2)$ no es EN

<u>Caso d)</u> $p \in (\frac{1}{2}, \frac{4}{7})$ $\sigma_2 = (p, 1-p)$

$BR_1(\sigma_2) = (1,0,0,0)$

Veamos si $BR_2(\sigma_1) = (p, (1-p))$

Para que 2 juegue una estrategia mixta se debe cumplir que

$\mathbb{E}(u_2(a)) = \mathbb{E}(u_2(b))$

$4 = 4$ ✓

Luego $\{((1,0,0,0),\ (p, 1-p)) : p \in (\frac{1}{2}, \frac{4}{7})\}$ son EN

Caso e)

Si $p = \frac{4}{7}$ $\sigma_2 = (\frac{4}{7}, \frac{3}{7})$

$BR_1(\sigma_2) = (1-\alpha, \alpha, 0, 0)$

$\mathbb{E}(u_2(a)) = (1-\alpha)\cdot 4 + \alpha \cdot 3$

$\mathbb{E}(u_2(b)) = (1-\alpha)\cdot 4 + \alpha \cdot 9$

Para que $\mathbb{E}(u_2(a)) = \mathbb{E}(u_2(b))$ se debe cumplir $\alpha = 0$ luego

$((1, 0, 0, 0), (\frac{4}{7}, \frac{3}{7}))$ es un EN

Caso f) $\sigma_2 = (p, 1-p)$ $p \in (\frac{4}{7}, 1)$

$BR_1(\sigma_2) = (0, 1, 0, 0) = \sigma_1$

$\mathbb{E}(u_2(a)) = 3$

$\neq \mathbb{E}(u_2(b)) = 9$ (es decir, 2 no quiere jugar una estrategia mixta)

$\therefore$ (σ_1, σ_2) no es EN

Caso g) $\sigma_2 = (1, 0)$

$BR_1(\sigma_2) = (0, 1, 0, 0) = \sigma_1$

(σ_1, σ_2) no es EN pues ya vimos que no hay EN en est. puras.

Con esto vemos que en resumidas cuentas el conjunto de los EN es

$E = \{ ((1, 0, 0, 0), (p, 1-p)) : p \in [\frac{1}{2}, \frac{4}{7}] \}$

P2) (Control 1 2003) Considere el juego del n-ultimátum, figura 1. En este juego, el primer jugador ofrece dividir US$100 con el jugador 2. Si 2 acepta, el juego acaba y los jugadores reciben los pagos respectivos (el primer pago es del oferente, el segundo pago es para el que decide aceptar, los demás reciben cero). Si 2 no acepta, debe hacer una oferta de división de US100\delta$, con δ< 1 al jugador 3. Si 3 no acepta, le hace una oferta a 4, y asíı sucesivamente.

a) **Considere n=3. Encuentre un equilibrio de Nash en que el primer jugador recibe US$50.**

b) **(Esta parte es independiente de la anterior). Considere solo equilibrios perfectos en el subjuego. Encuentre la expresión que describe cuánto recibe cada jugador para un n cualquiera.**

c) **Considere el caso en que lím $\rightarrow\infty$ Encuentre la condición para que el primer jugador reciba US$80 en un equilibrio perfecto en el subjuego.**

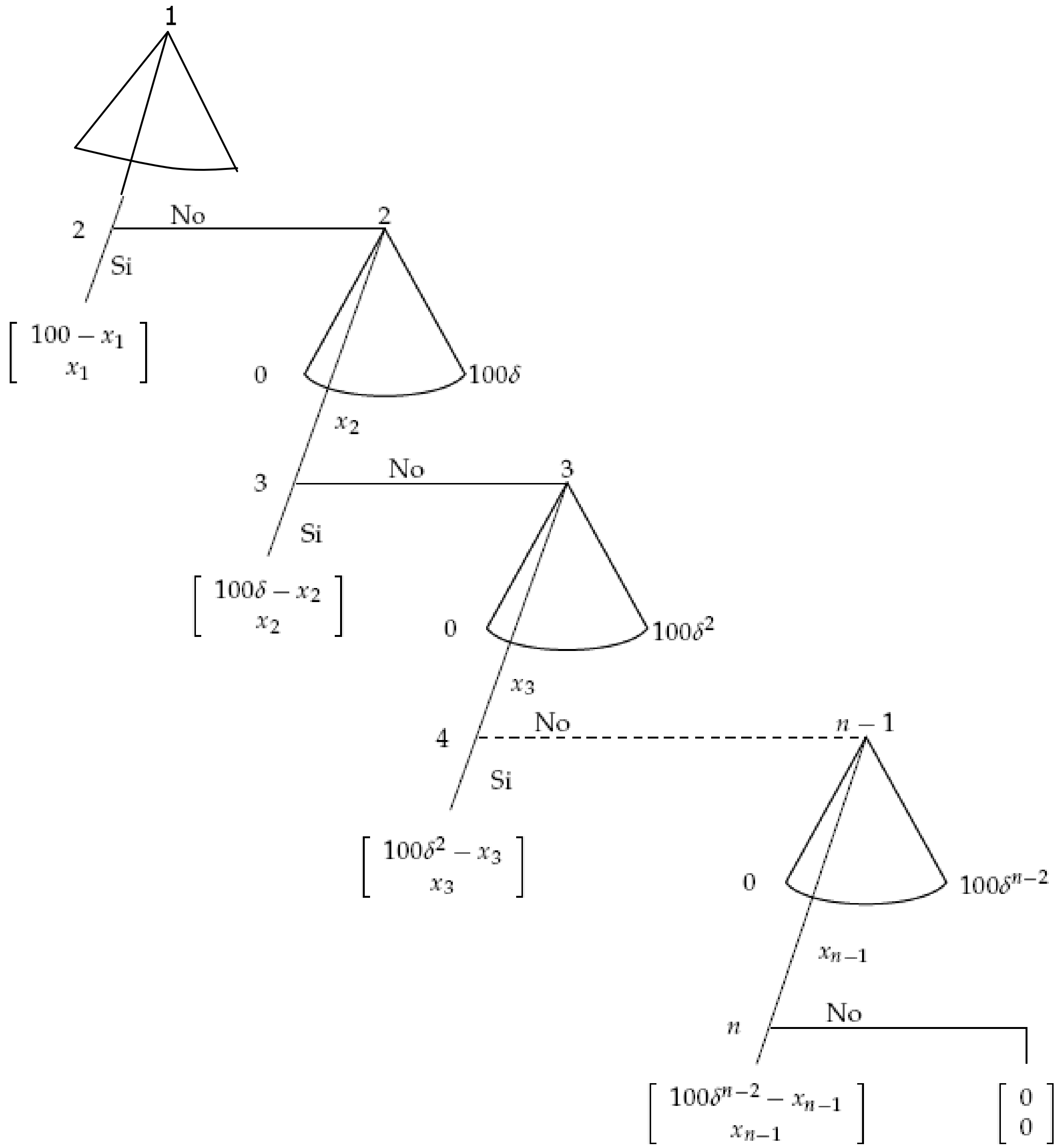
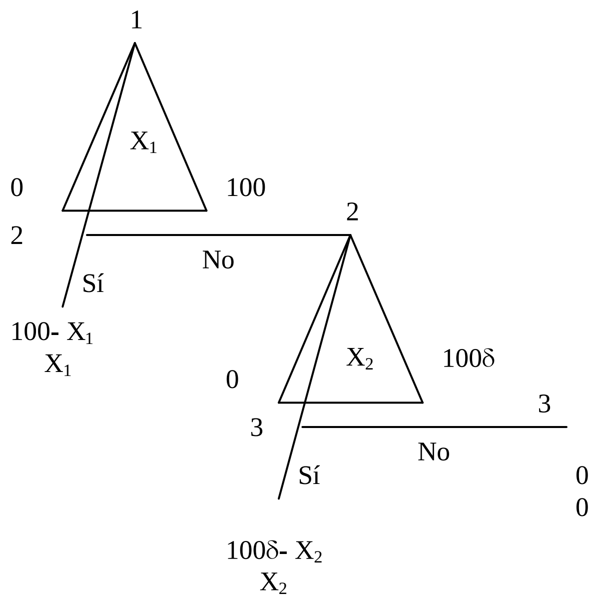


Figura 1: El juego del n-ultimátum

Solución:

P2) Juego del n-ultimátum

a) Para n=3 se tiene el siguiente árbol:



Un *Equilibrio de Nash*[1] considera que la estrategia de cada jugador es una mejor respuesta ante las estrategias de los demás jugadores.

En este caso debemos considerar que el primer jugador debe recibir como pago US$50.
Para que el jugador 1 pueda recibir 50 el jugador 2 debería aceptar la propuesta que le hace el 1, para ello el jugador tres debe amenazar de tal manera que al jugador 2 no le convenga rechazar lo que le ofrece el jugador 1. Por lo cuál las estrategias de cada jugador son de la siguiente manera.

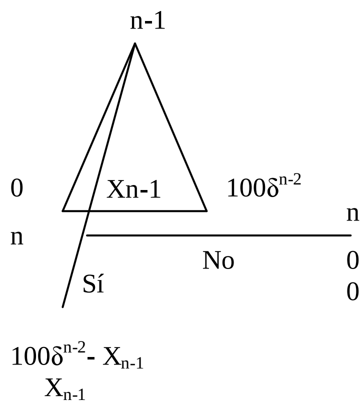
Estrategias:
Jugador 1: Ofrece US$50.
Jugador 2: Acepta solo si $X_1 \geq 50$.
Jugador 3: acepta solo si $X_2 > 50$.

Con estás estrategias se estaría cumpliendo un equilibrio de Nash, pues a nadie le conviene salir de la decisión que tomaron, dadas las estrategias de los demás jugadores.

b) Sabemos que un Equilibrio Perfecto en el Subjuego se cumple si al considerar cada subárbol, la combinación de estrategias restringidas al subárbol es un equilibrio de Nash del juego restringido al subárbol. De otra manera, cada jugador juega en forma óptima en cada nodo del subjuego.
Sea el siguiente subárbol genérico.

---

[1] Es una combinación de estrategias $S^* = (S^*_1, \ldots\ldots, S^*_n)$ tal que $\forall i, u_i(S^*_i, S^*_{-i}) \geq u_i(S_i, S^*_{-i})$



Dado que tenemos este subárbol para cada jugador, debemos ver que pasa con la decisión del jugador n-1. Puesto que si el jugador n rechaza el ofrecimiento de n-1, ambos se quedarán con 0, el jugador n-1 debe ofrecer a n, $X_{n-1} \geq 0$, ofreciéndole lo mínimo que equivale a 0, quedándose el con $100\delta^{n-2}$.

Ahora para que el jugador n-1, acepte el ofrecimiento del jugador n-2, este debe ofrecerle un pago tal que:
$X_{n-2} >= 100\delta^{n-2}$, quedándose el con una paga de $100\delta^{n-3}-100\delta^{n-2}$.

Veamos ahora el caso para el jugador n-3, para que le jugador n-2 acepta debe ofrecerle $X_{n-3} >= 100\delta^{n-3}-100\delta^{n-2}$, quedándose el con un pago de $100\delta^{n-4}-(100\delta^{n-3}-100\delta^{n-2})$ y así sucesivamente, por lo cuál llegamos a que el pago para cualquier n es la siguiente:

$$X_{n-i} = 100\delta^{n-(i+1)}(1-\delta+\delta^2-\delta^3.........)$$

$$X_{n-i} = 100\delta^{n-(i+1)}\sum_{j=0}^{i-1}(-\delta)^j (*)$$

Por otro lado, sabemos que $\sum_{j=0}^{i-1}(-\delta)^j = \dfrac{1+\delta^{n+1}}{(\delta+1)}$

Remplazando este valor en (*), podemos concluir que el pago para cualquier jugador n, es el siguiente:

$$X_{n-i} = 100\delta^{n-(i+1)}\frac{(1+\delta^{n+1})}{(1+\delta)}$$

C) Utilizando los resultados encontrados el parte B), tenemos que:

$X_{n-i} = 100\delta^{n-(i+1)} \dfrac{(1+\delta^{n+1})}{(1+\delta)}$, para encontrar la condición para que el jugador reciba US$80, cuando $\lim n \to \infty$, con lo cuál llegamos a lo siguiente:

$$80(1+\delta) = 100$$

$$\delta = \frac{1}{4} = 0.25$$

Problema 3

Considere un duopolio de Cournot. Se tiene $\pi_i = q_i(\theta_i - q_i - q_j)$, donde $\theta_i = a_i - c_i$ es la diferencia entre la intersección de la curva de demanda y los costos marginales constantes de la firma i . Las acciones son si $= q_i$. Se sabe que $\theta_1 = 1$, pero la firma 1 cree que la firma 2 puede ser de dos tipos: $\theta_2 = 3/4$ con probabilidad $1/2$ y $\theta_2 = 5/4$ con probabilidad $1/2$. Las firmas actúan en forma simultánea. Se debe resolver para un equilibrio en estrategias puras.

Solución:

La firma 2 conoce su tipo y resuelve

$$\max_{q_2} \quad q_2(\theta_2 - q_1 - q_2)$$

la CPO será

$$q_2\theta_2 - 2q_2 - q_1 = 0 \Rightarrow q_2 = \frac{\theta_2 - q_1}{2}$$

Luego si la firma 2 tienes costos bajos $q_2^B = \frac{\frac{5}{4} - q_1}{2}$ y si tiene costos altos $q_2^A = \frac{\frac{3}{4} - q_1}{2}$

La firma 1 conoce el problema de maximización de la otra firma y maximiza sus utilidades esperadas, dadas sus creencias sobre los costos que enfrenta la otra firma, es decir resuelve:

$$\max \quad \frac{1}{2}q_1(\theta_1 - q_1 - q_2^A(q_1)) + \frac{1}{2}q_1(\theta_1 - q_1 - q_2^B(q_1))$$

es decir resolverá

$$\max \quad \frac{1}{2}q_1(\theta_1 - q_1 - \frac{\frac{3}{4} - q_1}{2}) + \frac{1}{2}q_1(\theta_1 - q_1 - \frac{\frac{5}{4} - q_1}{2})$$

de la CPO se obtiene

$$\theta_1 - q_1 - \frac{1}{2} = 0$$

Con lo cual se obtiene $q_1 = 1/2$ y luego $q_2^B = 3/8$, $q_2^A = 1/8$