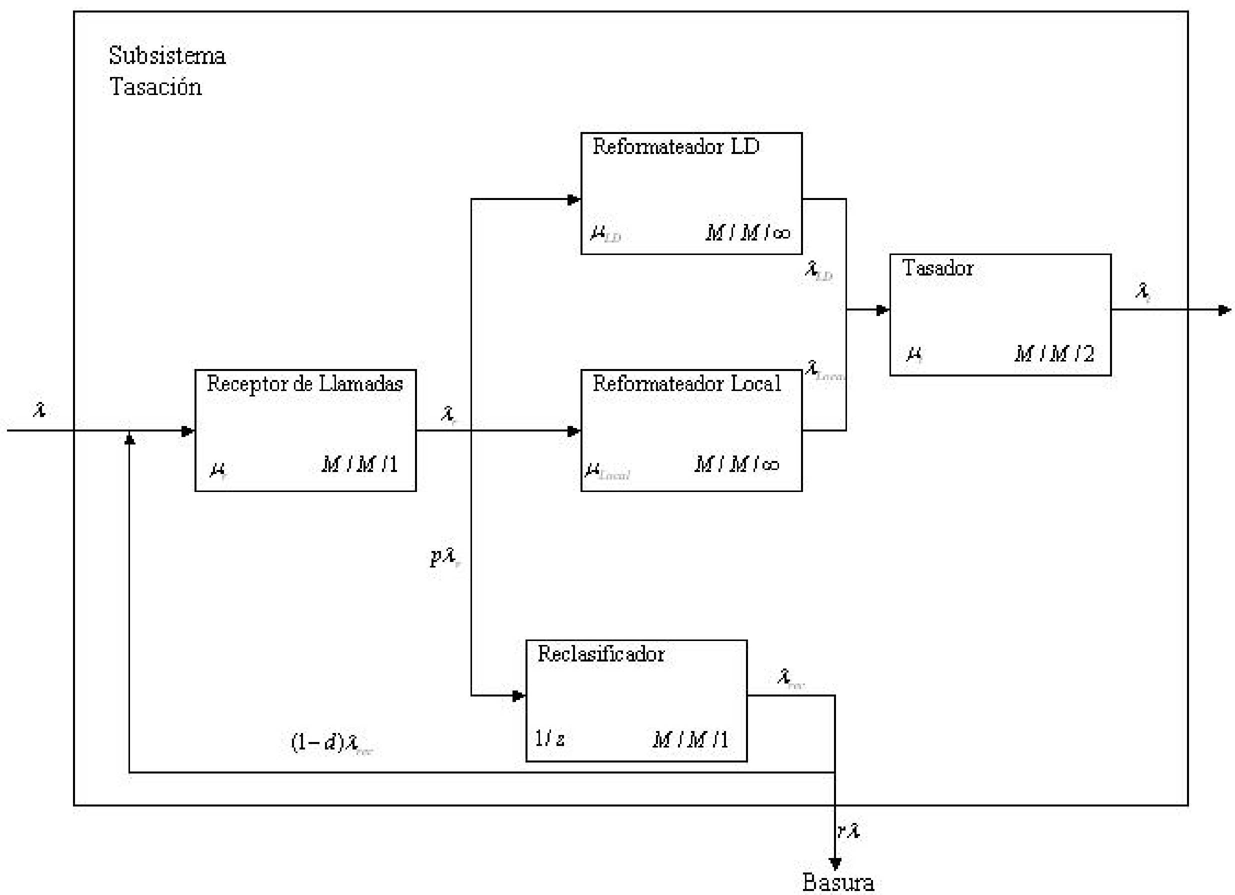
Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R.Esptein, P. Rey
Aux: F. Castro, R. Lagos, L. Reus, R. Wolf

Solucin CTP 5

15 de noviembre de 2006

1. (2,0 ptos.) Modele el subsistema de tasación como una red de colas.



2. (1,0 ptos.) Encuentre las tasas efectivas de entrada a cada una de las colas y especifique las condiciones para que exista estado estacionario.

   Tengase presente que la tasa de entrada al sistema no es dato, el dato es la tasa efectiva λ_r percibida por el receptor.

   Para encontrar las tasas se ocupan las siguientes ecuaciones:

   $\lambda + (1-d)\lambda_{rec} = \lambda_r$

   $p\lambda_r = \lambda_{rec}$

   $r\lambda = d\lambda_{rec}$

Las ecuaciones anteriores corresponden a los balances en el receptor, en el reclasificador y a igualar la tasa de envío a basura por parte del reclasificador con la entregada en el enunciado. De las ecuaciones se obtiene

$$d = \frac{r\lambda}{\lambda_{rec}}$$

y por tanto se tiene que

$$\lambda = \frac{\lambda_r(1-p)}{1-r}$$

Solo resta encontrar λ_t, λ_{LD} y λ_{Local}. La primera se obtiene de que necesariemente

$\lambda_t = \lambda(1-r)$ ya que, del equilibrio del sistema, $\lambda = r\lambda + \lambda_t$ lo que implica que $\lambda_t = (1-p)\lambda_r$

Finalmente del enunciado se tiene que una fracción q de los llamados que llegan al Tasador son de larga distancia, es decir

$$q\lambda_t = \lambda_{LD} \Rightarrow \lambda_{LD} = q(1-p)\lambda_r$$

y por tanto

$$(1-q)\lambda_t = \lambda_{Local} \Rightarrow \lambda_{Local} = (1-q)(1-p)\lambda_r$$

Notar que las tasas que se pedían calcular eran las de las colas Tasador, Reclacificador y las de los Reformateadores.

Para que exista estado estacionario, se debe exigir que cada componente (cola) del sistema sea estable, esto se logra con las siguientes condiciones:

- En el Receptor $\lambda_r < \mu_r$
- En el Reclasificador $\lambda_{rec} < \mu_{rec}$ donde $\mu_{rec} = \frac{1}{z}$
- En los Reformateadores no hay que imponer condición, ya que no importa la tasa a la cual lleguen los registros éstos siempre podrán ser atendidos.
- En el Tasador $\lambda_t < 2\mu_t$

3. (1,0 ptos.) Encuentre el número promedio de registros de llamados en el subsistema de tasación.

   Para responder esta pregunta cálculamos L, el número promedio de entidades en el sistema, como:

$$L = L_r + L_{rec} + L_{LD} + L_{Local} + L_t$$

- L_r corresponde al número promedio de entidades en un cola $M/M/1$, de las indicaciones generales y formulas se tiene que $L_r = \dfrac{\rho_r}{1-\rho_r}$ con $\rho_r = \dfrac{\lambda_r}{\mu_r}$.
- L_{rec} se calcula análogamente $L_{rec} = \dfrac{\rho_{rec}}{1-\rho_{rec}}$ con $\rho_{rec} = \dfrac{\lambda_{rec}}{\mu_{rec}}$.
- Los reformateadores son colas $M/M/\infty$, aunque no se dispone de la fórmula para calcular el $L_{M/M/\infty}$, ésta puede deducirse facilmente de la formula de Little teniedo en cuenta que $W_{M/M/\infty} = \frac{1}{\mu_{M/M/\infty}}$, ya que siempre que una entidad llega a un cola $M/M/\infty$ ésta podrá ser atendida, por lo tanto el tiempo medio que dura la entidad en una cola $M/M/\infty$ corresponde al tiempo medio de atención del servidor correpondiente. Así se concluye que $L_i = \dfrac{\lambda_i}{\mu_i}$ con $i \in \{LD, Local\}$.
- L_t corresponde al número promedio de entidades en un cola $M/M/2$, de las indicaciones generales y formulas se tiene que $L_t = \dfrac{2\rho_t}{1-\rho_t^2}$ con $\rho_t = \dfrac{\lambda_t}{2\mu_t}$.

4. (0,5 ptos.) Calcule el tiempo promedio que se tarda en procesar un registro de llamado en el subsistema de tasación.

   De la fórmula de Little, que dice que el número medio de entidades en el sistema es igual al tiempo medio que tarda una entidad en el sistema mutiplicado por la tasa de entrada efectiva al sistema, junto con L obtenido en el punto anterior y λ obtenido en el punto 2 se tiene el tiempo promedio que se tarda en procesar un registro de llamado en el subsistema de tasación $W = \dfrac{L}{\lambda}$.

5. (1,5) Calcule el tiempo promedio que tarda en salir del subsistema de tasación un llamado que acaba de ingresar al reclasificador.

   Exiten dos formas con las cuales tipicamente se responde este tipo de preguntas.

   Forma 1: se construye un sistema de ecuaciones para los tiempos promedio restantes en el sistema de las entidades que acaban de entrar a alguna de las colas, de la siguiente manera, sea τ_i el tiempo promedio que tarda una registro en abandonar el subsistema tasación una vez que ha ingresado en la cola $i \in \{r, rec, LD, Local, t\}$. Notar que $\tau_i = E(T_i)$, donde T_i es el tiempo que tarda una entidad en salir del sistema tasación una vez que ingresa a la cola i.

   Ecuaciones:

   - $\tau_r = W_r + q_{LD}\tau_{LD} + q_{Local}\tau_{Local} + p\tau_{rec}$

   La ecuación anterior se construtye de la siguiente forma

   $$E(T_r) = E(T_r\,|PLD)P(PLD) + E(T_r\,|PLocal)P(PLolal) + E(T_r\,|Prec)P(Prec)$$

   donde el evento Pi corresponde a proxima cola que se visita es la cola $i \in \{LD, Local, rec\}$ y $P(Pi)$ corresponde a la probabilidad de que ocurra Pi. Notar que $P(Prec) = p$, $P(PLD) = q_{LD}$ y $P(PLocal) = q_{Local}$ con q_{LD} y q_{Local} desconocidas, pero pueden ser calculadas usando las ecuaciones de balance de los reformateadores. Así $q_{LD} = \frac{\lambda_{LD}}{\lambda_r}$ y $q_{Local} = \frac{\lambda_{Local}}{\lambda_r}$. Luego la ecuación anterior puede reescribirse como

   $$E(T_r) = (W_r + E(T_{LD}))q_{LD} + (W_r + E(T_{Local}))q_{Local} + (W_r + E(T_{rec}))p$$

   ya que $E(T_r\,|Pi)$ corresponde de al tiempo promedio que se tarda el registro en la cola actual W_r más el tiempo promedio que tarda en salir cuando ingresa a la próxima cola a la que se dirige, en este caso la próxima cola es la cola i, y por tanto el tiempo promedio es $E(T_i)$. Notar que $q_{LD} + q_{Local} + p = 1$, de este hecho y de la reflexión anterior facilmente se puede deducir la primera ecuación para t_r.

   Las 4 ecuaciones que prosiguen (una por cada cola), se obtienen de manera análoga.

   - $\tau_{rec} = W_{rec} + (1-d)\tau_r$
   - $\tau_{LD} = W_{LD} + \tau_t$
   - $\tau_{Local} = W_{Local} + \tau_t$
   - $\tau_t = W_t$

   De las ecuaciones anteriores se tiene que

   $$\tau_{LD} = W_{LD} + W_t$$
   $$\tau_{Local} = W_{Local} + W_t$$
   $$\tau_r = \frac{\tau_{rec} - W_{rec}}{1-d}$$

   reemplazando los resultados anteriores en la primera ecuación del sistema, encontramos

   $$\tau_{rec} = \frac{W_{rec} + (1-d)\left\{W_r + q_{LD}\left[W_{LD} + W_t\right] + q_{Local}\left[W_{Local} + W_t\right]\right\}}{1-(1-d)p}$$

Forma 2: la segunda forma consiste en calcular el tiempo de permanencia medio en el sistema pero condicionando sobre el número de bucles que puede hacer una entidad dado que hay reflujo. Sea un bucle el camino que va desde el Reclasificador al Receptor y desde el Receptor al Reclasificador, este camino es recorrido con probabilidad $(1-d)p \equiv a$. Notese además, que existen dos maneras de cortar un bucle, ya sea saliendo por los reformateadores y luego por el tasador, o bien saliendo directamente a basura. Por último tengase presente que no importando que camino se recorra, el registro siempre tendrá que pasar una vez por el reclasificador, ya que la pregunda es sobre el tiempo promedio de un registro que acaba de ingresar, por lo tanto con seguridad este tardará en promedio W_{rec} más otros términos, que se calcularán de la manera siguiente.

Se descomponen los casos citados y luego se suma sobre todos éstos.

- Supongamos que se dan $i \in \{0, 1, 2...\}$ bucles, y se sale a través de los reformateadores. El tiempo promedio que se demora un registro en salir del sistema será

  $$i(W_r + W_{rec}) + W_r + \frac{q_{LD}}{1-p}[W_{LD} + W_t] + \frac{q_{Local}}{1-p}[W_{Local} + W_t]$$

  donde $\frac{q_i}{1-p}$ representa la probabilidad de salir por el reformateador i dado que se sale por alguno de los reformateadores.

  El evento descrito anteriormente ocurre con probabilidad $a^i(1-d)(1-p)$.

- La otra forma en la cual podemos abandonar el sistema es dando $i \in \{0, 1, 2...\}$ bucles y luego saliendo a basura, en esto un registro se tardará un tiempo

  $$i(W_r + W_{rec})$$

  y lo hará con probabilidad $a^i d$.

Finalmente para calcular τ_{rec} hay que sumar a W_{rec} todos los caso descritos anteriormente. $\tau_{rec} = W_{rec} + \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ i(W_r + W_{rec}) + W_r + \frac{q_{LD}}{1-p}[W_{LD} + W_t] + \frac{q_{Local}}{1-p}[W_{Local} + W_t] \right\} a^i (1-d) f + \sum_{i=0}^{\infty} i(W_r + W_{rec}) a^i d$. Donde $f = (1-p)$.

Agrupando términos se tiene que

$$\tau_{rec} = W_{rec} + (W_r + W_{rec})(1-a)\sum_{i=0}^{\infty} i a^i + (1-d)H\sum_{i=0}^{\infty} a^i$$

donde $H = \frac{q_{LD}}{1-p}[W_{LD} + W_t] + \frac{q_{Local}}{1-p}[W_{Local} + W_t]$. Usando los resultados de las series que se encuentran en indicaciones generales y fórmulas, y haciendo un poco de algebra, finalmente se tiene que

$$\tau_{rec} = \frac{W_{rec} + (1-d)\{W_r + q_{LD}[W_{LD} + W_t] + q_{Local}[W_{Local} + W_t]\}}{1-(1-d)p}$$

Dudas y/o Errores:

`fecastro@ing.uchile.cl`