Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: P. Hernandez, P. Rey, A. Saure
Aux: F. Castro, S. Maldonado, L. Reus

Control 3
23 de Junio, 2006

Pregunta 1

1. A una Estación de Servicio llegan automóviles de acuerdo a un proceso Poissoniano no homogéneo, cuya tasa está dada por $\lambda(t)$.

   a) (1.5 ptos.)Dado que llegó **exactamente un automóvil** en el intervalo $[0, t_1]$, entregue una expresión para la distribución del instante de dicha llegada.

   b) (0.5 ptos.) Muestre si el proceso de Poisson no homogéneo cumple o no la propiedad de incrementos estacionarios. Puede usar cálculos, gráficos y/o ejemplos para fundamentar su respuesta.

2. (2.0 ptos.) A un call center llegan llamadas según un proceso de Poisson de tasa λ[llamadas/min]. El tiempo de espera t_e, hasta que una llamada cualquiera es atendida por una de las telefonistas, es una variable aleatoria de densidad continua conocida $h(t_e)$, y la duración de la atención de las telefonistas t_f, es una variable aleatoria exponencial con media $1/\mu_f$ [min] .Calcule la cantidad esperada de clientes que están en comunicación con el call center, en un instante t cualquiera. Denote a esta esperanza $X(t)$. Note que un cliente en comunicación puede estar en espera o siendo atendido por una telefonista.

3. (2.0 ptos.) Personas llegan a una máquina expendedora de bebidas gaseosas según un proceso de Poisson de tasa γ[personas/minuto]. Al momento de llegar cada persona se pone en la cola con probabilidad $q_k = \frac{1}{k+1}$ y en caso contrario se va sin ingresar a la cola, donde k representa la cantidad de personas en el sistema de espera al momento de su arribo. El tiempo que demora cada persona en realizar la compra, una vez que llega su turno, es una variable aleatoria exponencial de parámetro δ. Calcule explícitamente las probablidades estacionarias de la cadena que representa la situación descrita y muestre analíticamente que la tasa efectiva de entrada al sistema es igual a la tasa efectiva de salida. Argumente porque se produce esta igualdad.

Pregunta 2

Una sucursal de Bancomático del BancoShile consiste de 2 cajeros automáticos en paralelo, según la siguiente configuración:

- Cajero 1: El primer cajero es exclusivo para Clientes BancoShile. Además de la persona en atención hay espacio para 1 persona en espera.
- Cajero 2: El segundo cajero es exclusivo para Clientes de Otros Bancos. Además de la persona en atención hay espacio para 1 persona en espera.

La llegada de personas al sistema es de acuerdo a dos procesos de Poisson independientes de tasa λ_B[pers./min.] para los Clientes BancoShile y de tasa λ_O[pers./min.] para Clientes de Otros Bancos. Por otro lado, el tiempo de la transacción en el cajero son variables aleatorias i.i.d. de medias $1/\mu_B$ [min.] para los Clientes BancoShile y $1/\mu_O$ [min.] para los Clientes de Otros Bancos.

Considere que los clientes ingresan al sistema que les corresponde según el tipo de persona que sea, los clientes no se pueden cambiar de subsistema y aquellos que encuentran su cajero lleno, se retiran sin ingresar al sistema.

1. (1.5 ptos.) Modele el estado de ocupación de la sucursal de Bancomático en una única cadena de Markov en tiempo continuo. Especifique los estados, tasas de transición y las condiciones de existencia de régimen estacionario.
2. Asumiendo conocidas las probabilidades estacionarias de la cadena de la parte 1, calcule:
   a) (0.5 ptos.) La tasa efectiva de salida del sistema de los Clientes de Otros Bancos.
   b) (0.5 ptos.) La esperanza de la cantidad de personas que en una hora llegan al sistema y no pueden ingresar porque el sistema está lleno.

El Gerente de Operaciones evalúa un sistema alternativo al ya descrito. En el Cajero 2 se elimina el espacio de espera. Por otro lado, para mejorar la atención de los clientes del propio banco, si el Cajero 2 está desocupado, los Clientes BancoShile que ingresan al sistema se pueden atender en el Cajero 2 si es que su propio cajero está en uso. Sin embargo, el Cajero 1 en ningún caso podrá ser usado por un Cliente de Otro Banco.

3. (2.0 ptos.) Modele la nueva situación como una cadena de Markov en tiempo continuo.
4. Asumiendo conocidas las probabilidades estacionarias de la cadena de la parte 3, calcule:
   a) (0.7 ptos.) La fracción del tiempo que el Cajero 2 está siendo utilizado por Clientes BancoShile , sobre el total del tiempo de ocupación de este cajero.
   b) (0.8 ptos.) El tiempo promedio de permanencia en el sistema de una persona cualquiera.

Pregunta 3

Una imprenta cuenta con una sola máquina que puede realizar dos tipos de trabajos: impresiones en color o impresiones en blanco y negro (B&N).

Los pedidos para impresiones a color llegan de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ_C [pedidos/hora] y se ejecutan en un tiempo exponencialmente distribuido de media $1/\mu_C$ [horas] cada uno. Análogamente, los pedidos para impresiones en B&N llegan de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ_{BN} [pedidos/hora] y se ejecutan en un tiempo exponencialmente distribuido de media $1/\mu_{BN}$ [horas] cada uno. Considere que el espacio para recibir pedidos es ilimitado.

Debido a la gran demanda que enfrenta la imprenta y a lo costoso que es pasar de un modo operativo al otro, se ha decidido que mientras se esté trabajando en impresiones o haya trabajos pendientes de un tipo, no se aceptarán pedidos de impresiones del otro tipo, los cuales serán rechazados y no entrarán a la cola de trabajo. Los pedidos de impresión del tipo que se está ejecutando son aceptados todos y puestos en cola.

Cuando la impresora está desocupada sin trabajos en cola y el próximo trabajo que llega requiere un cambio de modo operativo, asuma que el tiempo que tarda este cambio es despreciable.

1. (2.0 ptos.) Modele el funcionamiento de la imprenta como una cadena de Markov en tiempo continuo. Especifique los estados y tasas de transición. Indique los "casos genéricos" para los estados, a partir de los cuales se pueda reconstruir toda la cadena.

2. (1.5 ptos.) ¿Qué condiciones se deben satisfacer para que esta cadena admita probabilidades estacionarias? Plantee un sistema de ecuaciones que permitiría calcularlas.

3. Suponga que se cumplen las condiciones de estacionariedad y que las probabilidades estacionarias son conocidas. Responda:

   a) (1.0 pto.) ¿Cuál es la tasa promedio de pedidos de impresiones a color que son aceptados?

   b) (0.5 pto.) ¿Cuál es el tiempo medio de permanencia de un pedido cualquiera en el sistema?

   c) (1.0 pto.) Si en un instante del tiempo, la máquina está configurada para realizar trabajos en color. ¿Cuál es la probabilidad de que sea necesario un cambio de modo de operación la próxima vez que el sistema se vacíe ?

Indicaciones Generales y Fórmulas

- Algunas Distribuciones

  $X \rightsquigarrow \text{EXP}(\lambda)$: $\quad f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \ \forall\, x \geq 0 \quad E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

  $X \rightsquigarrow \text{Poisson}(\lambda)$: $\quad \Pr[X = k] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \quad E(X) = \lambda \quad \text{Var}(X) = \lambda$

  $X \rightsquigarrow \text{geométrica}(p)$: $\quad \Pr[X = k] = (1-p)\cdot p^k \quad E(X) = \frac{p}{1-p} \quad \text{Var}(X) = \frac{p}{(1-p)^2}$

- Algunas sumas

  $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} k a^k = \frac{a}{(1-a)^2} \quad \text{si } |a| < 1$

  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n \quad \text{si } a, b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$

- Sistemas elementales de espera en estado estacionario

  $M/M/1$

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} \qquad \pi_0 = 1-\rho \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

  $M/M/2$

$$L = \frac{2\cdot\rho}{1-\rho^2} \qquad \pi_0 = \frac{1-\rho}{1+\rho} \qquad \rho = \frac{\lambda}{2\mu}$$