Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

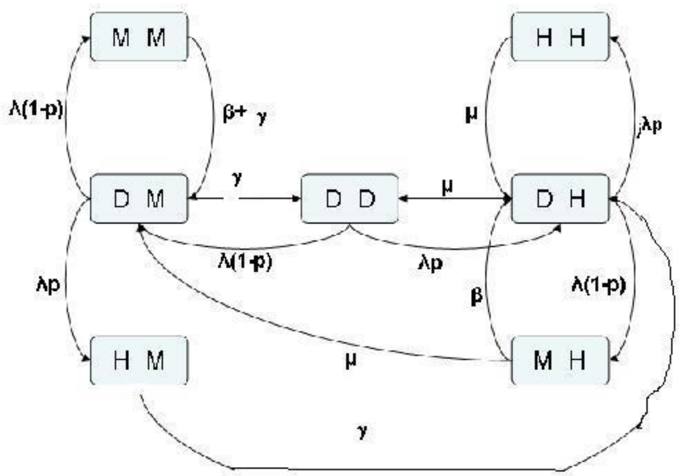
IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Rey
Aux: F.Castro, R.Lagos, L.Reus, R.Wolf

Solución Auxiliar 18, 31 de octubre 2006

Cadenas de markov Tiempo Continuo

Problema 1

1. La cadena de Markov queda de la siguiente forma:



2. Tenemos una cadena irreducible y finita → Existen probabilidades estacionarias.
   Para encontrarlas debemos plantear el sistema de ecuaciones de balance en los nodos. El sistema es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
\pi_{DD} \cdot \lambda &= \pi_{DM} \cdot \gamma + \pi_{DH} \cdot \mu \\
\pi_{DM} \cdot (\lambda + \gamma) &= \pi_{MM} \cdot (\beta + \gamma) + \pi_{DD} \cdot \lambda(1-p) + \pi_{MH} \cdot \mu \\
\pi_{MM} \cdot (\beta + \gamma) &= \pi_{DM} \cdot \lambda(1-p) \\
\pi_{HM} \cdot \gamma &= \pi_{DM} \cdot \lambda p \\
\pi_{DH} \cdot (\lambda + \mu) &= \pi_{HH} \cdot \mu + \pi_{DD} \cdot \lambda p + \pi_{MH} \cdot \beta + \pi_{HM} \cdot \gamma \\
\pi_{HH} \cdot \mu &= \pi_{DH} \cdot \lambda p \\
\pi_{MH} \cdot (\beta + \mu) &= \pi_{DH} \cdot \lambda(1-p) \\
\sum_i \pi_i &= 1
\end{aligned}
$$

3. Consideramos conocidas las probabilidades estacionarias:

   a) Primero identificamos los estados en los cuales, de llegar un alumno, se deberá retirar por que encuentra ambos lugares ocupados. Entonces, dado que en cada uno de estos estados la tasa de llegada de alumnos es la misma (λ), tendremos que:

   $$E[\text{Alumnos perdidos}] = \lambda \cdot (\pi_{MM} + \pi_{HH} + \pi_{HM} + \pi_{MH})$$

   b) Si un hombre llega y encuentra un lugar, la esperanza del tiempo de espera dependerá del estado en el que encuentra al sistema. De esta forma:

   $$E[\text{Espera hombre}] = \frac{\pi_{DD}}{\pi_{DD} + \pi_{DM} + \pi_{DH}} \cdot 0 + \frac{\pi_{DH}}{\pi_{DD} + \pi_{DM} + \pi_{DH}} \cdot \frac{1}{\mu} + \frac{\pi_{DM}}{\pi_{DD} + \pi_{DM} + \pi_{DH}} \cdot \frac{1}{\gamma}$$

   c) Si la persona que esta antes que ella (atendiendose) es un hombre, la probabilidad de irse indignada es la probabilidad que una variable aleatoria de distribución exponencial de media $\frac{1}{\mu}$ sea menor que una variable aleatoria de distribución exponencial de media $\frac{1}{\beta}$. Esta probabilidad es:

   $$\frac{\beta}{\beta + \mu}$$

   Si la persona que esta antes que ella (atendiendose) es una mujer, la probabilidad de irse indignada es la probabilidad que una variable aleatoria de distribución exponencial de media $\frac{1}{\gamma}$ sea menor que una variable aleatoria de distribución exponencial de media $\frac{1}{\beta}$. Esta probabilidad es:

   $$\frac{\beta}{\beta + \gamma}$$

   Para calcular la probabilidad solo debemos ponderar por la probabilidad de encontrar al sistema en un estado en particular.

   $$E[\text{Espera hombre}] = \frac{\pi_{DH}}{\pi_{DD} + \pi_{DM} + \pi_{DH}} \cdot \frac{\beta}{\beta + \mu} + \frac{\pi_{DM}}{\pi_{DD} + \pi_{DM} + \pi_{DH}} \cdot \frac{\beta}{\beta + \gamma}$$

Problema 2

1. Si denotamos $X(t)$ e $Y(t)$ a las cantidades de clientes tipo 1 y tipo 2 respectivamente, en el instante t. Luego $\{[X(t), Y(t)], t \geq 0\}$ es una Cadena de Markov en Tiempo Continuo con las siguientes tasas infinitesimales:

$$q[(n,m),(n+1,m)] = n\lambda r \qquad q[(n,m),(n,m+1)] = n\lambda(1-r)+\theta$$
$$q[(n,m),(n-1,m)] = n\mu \qquad q[(n,m),(n,m-1)] = m\nu$$

2. - Para encontrar E[X(t)], debemos notar que $\{X(t), t \geq 0\}$ es por sí sola una Cadena de Markov en Tiempo Continuo. Para simplicar notación, se define $M_x(t) = E[X(t)|X(0)]$.
   Ahora se obtiene una ecuación diferencial satisfecha por $M_x(t)$. Veamos las transiciones entre t y $(t+h)$ y sus respectivas probabilidades, condicional en X(t), con $h \rightsquigarrow 0$

$$X(t+h) = \begin{cases} X(t)+1 & \text{con prob.} \quad \lambda r X(t)h + o(h) \\ X(t)-1 & \text{con prob.} \quad \mu X(t)h + o(h) \\ X(t) & \text{con prob.} \quad 1-(\lambda r+\mu)X(t)h + o(h) \end{cases}$$

   Luego, tomando esperanza se tiene:

$$E[X(t+h)|X(t)] = X(t) + (\lambda r - \mu)X(t)h + o(h)$$

   y tomando esperanza nuevamente, se tiene que:

$$M_x(t+h) = M_x(t) + (\lambda r - \mu)M_x(t)h + o(h)$$

   Reordenando:

$$\frac{M_x(t+h) - M_x(t)}{h} = (\lambda r - \mu)M_x(t) + \frac{o(h)}{h}$$

   Dado que $h \rightsquigarrow 0$:

$$M_x'(t) = (\lambda r - \mu) M_x(t)$$

De donde se tiene que:

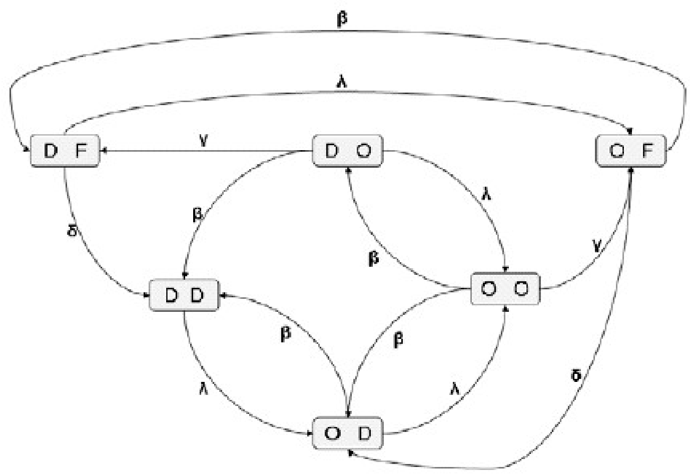
$$M_x(t) = K e^{(\lambda r - \mu)t}$$

Finalmente dado que $M(0) = K = i$:

$$M_x(t) = i e^{(\lambda r - \mu)t}$$

Problema 3

1. La cadena asociada al problema se muestra en la figura.



En esta cadena, la primera coordenada indica el estado de ocupación del equipo de alta calidad y la segunda el estado del equipo de baja calidad.

La cadena ilustrada es irreducible y finita, por lo que podemos asegurar que existirá una ley de probabilidades estacionarias. Las ecuaciones necesarias para su cálculo son las siguientes (ecuaciones de balance):

$$\begin{aligned}
\pi_{DD} \cdot \lambda &= \pi_{OD} \cdot \beta + \pi_{DO} \cdot \beta + \pi_{DF} \cdot \delta \\
\pi_{OD} \cdot (\lambda + \beta) &= \pi_{DD} \cdot \lambda + \pi_{OO} \cdot \beta + \pi_{OF} \cdot \delta \\
\pi_{OO} \cdot (2 \cdot \beta + \gamma) &= \pi_{OD} \cdot \lambda + \pi_{DO} \cdot \lambda \\
\pi_{DO} \cdot (\lambda + \beta + \gamma) &= \pi_{OO} \cdot \beta \\
\pi_{OF} \cdot (\delta + \beta) &= \pi_{DF} \cdot \lambda + \pi_{OO} \cdot \gamma \\
\pi_{DF} \cdot (\lambda + \delta) &= \pi_{OF} \cdot \beta + \pi_{DO} \cdot \gamma \\
\sum_i \pi_i &= 1
\end{aligned}$$

2. Para responder esta pregunta debemos identificar los estados en los cuales se rechazan solicitudes, interpretar las probabilidades estacionarias como fracción en el largo plazo que el sistema se encuentra en un estado y identificar la tasa efectiva de rechazos para cada estado. Con esto tendremos que:

$$E[\text{Rechazos}] = \pi_{OO} \cdot \lambda + \pi_{OF} \cdot \lambda$$

3. Nuevamente interpretamos las probabilidades estacionarias como fracción del tiempo que se permanece en un estado en el largo plazo. Entonces:

$$\text{Tasa equipo alta calidad} = \pi_{OD} + \pi_{OO} + \pi_{OF}$$

y

$$\text{Tasa equipo baja calidad} = \pi_{DO} + \pi_{OO}$$

4. Independiente del estado del sistema la distribución del tiempo de falla y de duración de la presentación se mantienen invariantes. Entonces la pregunta es ¿cuál es la probabilidad que el valor de una variable aleatoria de distribución exponencial de parámetro β sea menor al valor de una de distribución exponencial de parámetro γ. Llamando a esta probabilidad P tendremos que:

$$P = \frac{\beta}{\beta + \gamma}$$