Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Rey
Aux: F. Castro, R. Lagos, L. Reus, R. Wolf

Solución Control 2
6 de Octubre de 2006

Problema 1

1. La probabilidad que la próxima llamada recibida sea por la línea directa del LOCAL A es igual a $\dfrac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B + \mu}$.

2. La probabilidad que una llamada cualquiera sea para el LOCAL A es igual a $\dfrac{\lambda_A + p\mu}{\lambda_A + \lambda_B + \mu}$.

3. En una hora cualquiera, se reciben, en promedio, $\lambda_A + \lambda_B + \mu$ llamadas en total.

4. Sea X el número de llamadas derivadas al LOCAL A. La distribución de X condicionada en que han pasado exactamente k llamados por la central está dada por:

$$P(X = n) = \begin{cases} \dbinom{k}{n} p^n (1-p)^{k-n} & \text{si } 0 \leq n \leq k\,, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

5. Sea Y el número total de llamadas al LOCAL A. La distribución de Y condicionada en que han pasado exactamente k llamados por la central está dada por:

$$P(Y = m) = \sum_{n=\max\{0,m-k\}}^{\min\{k,m\}} \binom{k}{n} p^n (1-p)^{k-n} \frac{e^{-\lambda_A t}(\lambda_A t)^{m-n}}{(m-n)!}\,.$$

6. Para calcular esta probabilidad condicionamos en cuales llamadas por la central van dirigidas al local A. Denotaremos las llamadas como llamada 1 y llamada 2, sin considerar el orden en que llegan. El tiempo de llegada de la llamada i es la variable aleatoria T_i $(i = 1, 2)$. El instante de llegada de la llamada directa es S. Las tres variables aleatorias S, T_1 y T_2 tienen distribución uniforme en $[0, t]$ y son independientes entre sí.

   Tenemos cuatro casos:

   Caso 1: Ninguna de las llamadas por la central va al local A. En este caso, la única llamada al local A es la llamada directa y entonces el tiempo de llegada es igual a S. Por lo tanto la función de distribución de T condicionada es:

$$F_T(x|\text{Caso } 1) = F_S(x) = \frac{x}{t}\,.$$

Caso 2: Sólo la llamada 1 va al local A. En este caso, T es igual al mínimo de T_1 y S. Por lo tanto la función de distribución de T condicionada es:

$$\begin{aligned} F_T(x|\text{Caso 2}) &= P(T \le x) \\ &= P(S \le x \text{ y } T_1 \le x) \\ &= P(S \le x \text{ o } (S < x \text{ y } T_1 \le x)) \\ &= F_S(x) + (1 - F_S(x))F_{T_1}(x) \\ &= \frac{x}{t} + \frac{(t-x)x}{t^2} \,. \end{aligned}$$

Caso 3: Sólo la llamada 2 va al local A. Este caso es similar al caso 2 y vale que:

$$F_T(x|\text{Caso 3}) = \frac{x}{t} + \frac{(t-x)x}{t^2} \,.$$

Caso 4: Ambas llamadas por la central van al local A. Este caso se puede obtener de manera análoga a los anteriores que:

$$F_T(x|\text{Caso 4}) = \frac{x}{t} + \frac{(t-x)x}{t^2} + \frac{(t-x)^2 x}{t^3} \,.$$

Con estos valores podemos calcular

$$\begin{aligned} F_T(x) &= F_T(x|\text{Caso 1})P(\text{Caso 1}) + F_T(x|\text{Caso 2})P(\text{Caso 2}) \\ &\quad + F_T(x|\text{Caso 3})P(\text{Caso 3}) + F_T(x|\text{Caso 4})P(\text{Caso 4}) \\ &= \frac{x}{t}(1-p)^2 + 2\left(\frac{x}{t} + \frac{(t-x)x}{t^2}\right)p(1-p) + \left(\frac{x}{t} + \frac{(t-x)x}{t^2} + \frac{(t-x)^2 x}{t^3}\right)p^2 \,. \end{aligned}$$

Problema 2

1. La probabilidad que r pacientes sean dados de alta condicionada a que hay i pacientes para la revisión es igual a

$$\alpha_{ir} = \begin{cases} \binom{i}{r} p^r (1-p)^{i-r} & \text{si } 0 \le r \le i \,, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

2. La probabilidad que haya j pacientes para la revisión condicionada a que había s pacientes internados luego de la revisión del día anterior es igual a

$$\beta_{sj} = \begin{cases} 0 & \text{si } j < s \,, \\ q_{j-s} & \text{si } s \le j < C \,, \\ \sum_{l=C-s}^{\infty} q_l & \text{si } j = C \,, \end{cases}$$

3. (1,0 pto.) Llamemos p_{ij} a la probabilidad que si una mañana cualquiera (antes de las revisiones) hay i pacientes en el centro, a la mañana siguiente el médico encuentre j pacientes para revisar. Entonces,

$$p_{ij} = \sum_{k=0}^{i} \alpha_{i,k}\beta_{i-k,j} \,.$$

4. (2,0 ptos.) Una cadena que modela el sistema tiene como estados el número de pacientes internados a la hora de la revisión. Es decir, el conjunto de estados $E = \{0, 1, 2, \ldots, C\}$. Las probabilidades de transición están definidas por las p_{ij} definidas en el punto 3.

   La cadena tiene una sola clase de estados que es recurrente y aperiódica.

5. (1,0 pto.) La nueva cadena tiene el mismo conjunto de estados. Sus probabilidades de transición están dadas por:

$$p'_{ij} = \begin{cases} p_{ij} & \text{si } j < i\,, \\ \sum_{k=i}^{C} p_{ik} & \text{si } j = i\,, \\ 0 & \text{si } j > i\,. \end{cases}$$

6. Sí se puede afirmar ya que la cadena tiene como único estado recurrente al 0, lo que implica la cadena tiene probabilidades estacionaria y que $\pi_0 = 1$. Es decir, con probabilidad 1, el recinto quedará vacío.

7. Llamando T al número de días que hay que esperar hasta que el pabellón de internación se vacía, se puede afirmar que $E[T]$ es finita.

   Una manera de acotar $E[T]$ es considerar una cadena con los mismos estados que la cadena del punto 5 pero cuyas probabilidades de transición sean:

$$p^{\star}_{ij} = \begin{cases} p'_{ij} & \text{si } j = i - 1\,, \\ 1 - p'_{ij} & \text{si } j = i\,, \\ 0 & \text{si } j > i\,. \end{cases}$$

   Sea $T^{\star}$ el número de transiciones que se demora en esta cadena para ir del estado M al estado 0. No es difícil convencerse que $E[T] \leq E[T^{\star}]$: un argumento intuitivo es que sólo estamos dejando salir los pacientes de a uno, mientras que en el caso que nos interesa pueden ser dados de alta varios pacientes el mismo día.

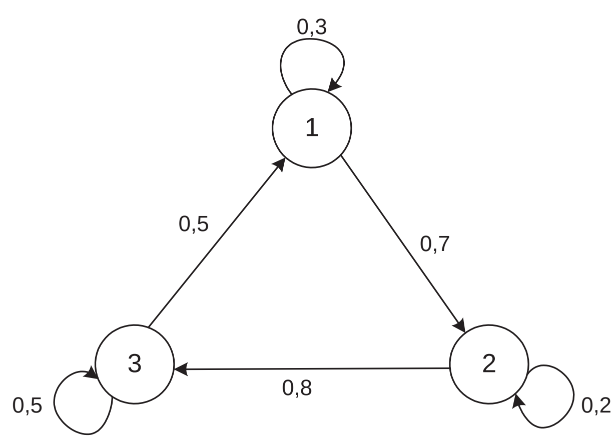
   Sea T_i el número de transiciones que se demora en esta cadena para ir del estado i al estado $i-1$. Estas variables aleatorias tienen distribución geométrica y por lo tanto su esperanza es finita. Entonces,

$$E[T^{\star}] = \sum_{i=1}^{M} E[T_i]$$

   es finita, y por lo tanto, $E[T]$ también es finita.

Problema 3

1. El comportamiento del animal puede ser modelado con la cadena que se muestra en la figura. El estado i corresponde a un día que el animal se alimenta en el sector i.



2. Suponemos que el animal está en el sector 1.

   a) La probabilidad que en tres días más esté en el sector 3 puede ser calculada como $(P^3)_{13}$. Como

$$P^3 = \begin{bmatrix} 0{,}307 & 0{,}133 & 0{,}560 \\ 0{,}400 & 0{,}288 & 0{,}312 \\ 0{,}245 & 0{,}350 & 0{,}405 \end{bmatrix}$$

   la probabilidad solicitada es igual a 0,56.

   b) Para llegar exactamente en tres transiciones por primera vez del estado 1 al estado 3 hay que realizar una transición del estado 1 al 2, una del estado 2 al 3 y haber permanecido por una transición en el estado 1 o en el estado 2. Por lo tanto, la probabilidad que queremos calcular es igual a $(0{,}3 + 0{,}2) \times 0{,}7 \times 0{,}8 = 0{,}28$.

   c) La cadena del punto 1. admite probabilidades estacionarias ya que es finita y ergódica. Sus probabilidades estacionarias se obtinenen resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 0{,}3\pi_1 + 0{,}7\pi_2 \\ \pi_2 &= 0{,}2\pi_2 + 0{,}8\pi_2 \\ \pi_3 &= 0{,}5\pi_1 + 0{,}5\pi_3 \\ 1 &= \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \end{aligned}$$

   Las probabilidades estacionarias son iguales a:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 40/131 = 0{,}30 \\ \pi_2 &= 35/131 = 0{,}27 \\ \pi_3 &= 56/131 = 0{,}43 \end{aligned}$$

   d) La fracción de días que el animal debe desplazarse es igual a

$$\sum_{i=1}^{3} \pi_i(1 - p_i) = 0{,}3 \times 0{,}7 + 0{,}27 \times 0{,}8 + 0{,}43 \times 0{,}5 = 0{,}21 + 0{,}216 + 0{,}215 = 0{,}641\,.$$