



Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y
Matemáticas

Departamento de Ingeniería Industrial
IN44A Investigación Operativa
Semestre Primavera 2006

Profesores: Rafael Epstein
Pablo Rey

Auxiliares: F. Castro
R. Lagos
L. Reus
R. Wolf

CTP 4 martes 24 de octubre de 2006

Aerolíneas Beauchef, al igual que el resto de las líneas aéreas del mercado premia con millas de vuelo a sus pasajeros. En el caso de esta empresa la cantidad de millas que acumula un usuario dependen de la jerarquía que este posea, la aerolínea evalúa cada tres meses en que nivel se encuentran sus distintos pasajeros. Un pasajero puede estar catalogado, de menor a mayor relevancia, como cliente poco frecuente, cliente normal, cliente frecuente, cliente vip silver y cliente vip gold. Los pasajeros siempre parten en la categoría poco frecuente, también se sabe que una vez que un pasajero alcanza el estatus vip nunca bajara de esta categoría. Por su parte un usuario va avanzando o retrocediendo en su estatus paso a paso, por ejemplo no es posible pasar de frecuente a poco frecuente, o de normal a vip silver. A su vez las probabilidades de evolucionar desde un estado inferior al superior respectivo son: 0,5 de poco frecuente a normal, 0,6 de normal a frecuente, 0,2 de frecuente a vip silver y 0,5 de vip silver a vip gold. Mientras que las probabilidades de permanecer en un estado son 0,5; 0,2; 0,3; 0,5 y 0,3 para poco frecuente, normal, frecuente, vip silver y vip gold respectivamente.

Es importante señalar que las millas ganadas por estar en la categoría poco frecuente son 3.000, por pertenecer a normal 5000, para los frecuentes son 10.000, a su vez los vip silver ganan 25000 y los vip gold 35000. Además cuando un pasajero es ascendido de categoría recibe siempre una bonificación de 3000 millas. Por último no existen beneficios residuales.

Ante tal situación los ejecutivos de la aerolínea desean que usted de respuesta a los siguientes puntos:

- 1- Modele la situación recién descrita como una cadena de Markov. Argumente porque existen probabilidades estacionarias y calcúlelas (use tres decimales de ser necesario). (2 puntos)
- 2- Calcule el valor esperado de una transición de un pasajero en el largo plazo (g) (1 punto)
- 3- Calcule el valor esperado de una transición de un pasajero en el largo plazo, si es que ahora se elimina el estatus cliente poco frecuente y todos parten desde cliente normal, pasando a ser la probabilidad de mantenerse como cliente normal 0,4 y el resto de las probabilidades no sufre variación. Además ahora por ser cliente normal se acumularan sólo 4000 millas, las de los frecuentes se mantendrán y el vip silver ganara 27000 y el vip gold 32000. A su vez la bonificación por ascender se mantiene
Desde el punto de vista de las transiciones de los clientes en el largo plazo ¿Qué situación le conviene más a la empresa, la descrita al comienzo o la señalada en este punto, si los clientes se encuentran indiferentes entre ambas alternativas? (1,5 puntos)

- 4- El sistema de información de la empresa se ha caído y un cliente que nunca ha usado sus millas desea saber cuantas acumuló antes de pertenecer al grupo vip. Ante la falla tecnológica los ejecutivos le piden a usted que de respuesta a esa pregunta (los ejecutivos se conforman con que de el valor esperado de las millas del cliente, la situación del sistema de millas es la descrita al comienzo del enunciado). (1,5 puntos)

Duración 60 minutos, sin tiempo adicional.

Las siguientes matrices con sus respectivas inversas pueden llegar a servirles a la hora de resolver el ctp. En caso de que nunca les aparezcan una de estas matrices en sus cálculos, se le recomienda revisarlos y si la situación persiste usen su calculadora **ya que si la idea esta buena** sólo tendrán un pequeño descuento por haber hecho mal los cálculos :

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/5 & 4/5 & -3/5 \\ 0 & -1/2 & 7/10 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 13/3 & 35/6 & 5 \\ 7/3 & 35/6 & 5 \\ 5/3 & 25/6 & 5 \end{bmatrix}$$

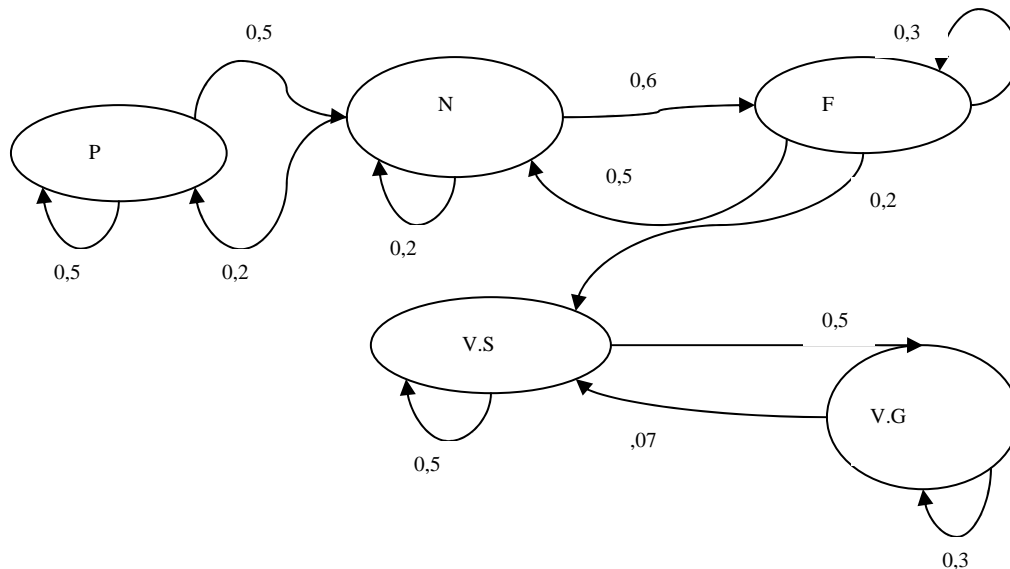
$$\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/5 & 4/5 & -3/5 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 7/10 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 7/10 & 7/10 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 7/2 & 15/4 & 5/2 & 1/2 & 5/14 \\ 3/2 & 15/4 & 5/2 & 1/2 & 5/14 \\ 5/6 & 25/12 & 5/2 & 1/2 & 5/14 \\ -5/6 & -25/12 & -5/2 & 1/2 & 5/14 \\ 5/6 & 25/12 & 5/2 & -1/2 & 5/14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/5 & 4/5 & -3/5 \\ 0 & -1/2 & 3/10 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -5/2 & -5 \\ -1 & -5/2 & 5 \\ -5/3 & -25/6 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/5 & 4/5 & -3/5 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 7/10 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 3/10 & 3/10 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 7/2 & 15/4 & 5/2 & 1/2 & 5/6 \\ 3/2 & 15/4 & 5/2 & 1/2 & 5/6 \\ 5/6 & 25/12 & 5/2 & 1/2 & 5/6 \\ -5/6 & -25/12 & -5/2 & 1/2 & 5/6 \\ 5/6 & 25/12 & 5/2 & -1/2 & 5/2 \end{bmatrix}$$

Solución

1-



Existen probabilidades estacionarias porque la cadena es ergoica + transiente (basta con que digan que posee una única clase recurrente que es aperiódica)

En el largo plazo sabemos que $\pi_p = \pi_n = \pi_f = 0$ Luego

$$[\pi_{vs} \ \pi_{vg}] = [\pi_{vs} \ \pi_{vg}] \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,7 & 0,3 \end{bmatrix} \text{ más } \pi_{vs} + \pi_{vg} = 1, \text{ dan como resultado que:}$$

$$\pi_{vs}=0,583; \ \pi_{vg}=0,417$$

(1 punto por el modelo; 0,5 por saber calcular las probabilidades estacionarias; 0,5 por calcularlas bien)

2-

$$g = \sum \pi_i \hat{r}_i ; \text{ en este caso sólo necesitamos calcular } \hat{r}_{vs} \text{ y } \hat{r}_{vg}$$

$$\hat{r}_{vs} = 25000 + 0,5 \cdot 3000 = 26500$$

$$\hat{r}_{vg} = 35000$$

$$\text{Así } g = 0,583 \cdot 26500 + 0,417 \cdot 35000 = 30044,5$$

(0,3 por saber la formula; 0,7 por calcularlo bien. Ojo si se equivoco en el calculo de las probabilidades estacionarias, pero calculo bien el g con las que él saco en 1- poner todo el puntaje en 2-)

3-

Como la parte transiente de la cadena es la que se altera esto no repercute en las probabilidades estacionarias. Para el calculo de g si cambian los \hat{r}_{vs} y \hat{r}_{vg} que ahora valen:

$$\hat{r}_{vs} = 27000 + 0,5*3000 = 28500$$

$$\hat{r}_{vg} = 32000$$

$$\text{Así } g = 0,583*28500 + 0,417*32000 = 29959,5$$

A la empresa le conviene más la nueva situación desde el punto de vista de las transiciones en el L.P., ya que los clientes son indiferentes a ambas situaciones y en esta la empresa debe dar menos millas.

(1 punto por el buen cálculo de g (usando las probabilidades estacionarias que él saco en 1-); 0,5 por argumentar la conveniencia: que digan que a la empresa le conviene la situación en que tiene que dar menos millas, dados los valores de g que el alumno obtuvo)

4-

El proceder es similar al de cuando se calcula lo que se espera en el transiente, sólo que manteniendo los beneficios de esta parte (no haciéndolos valer 1).

Luego:

$\hat{r}_p = 3000 + 0,5*3000$; $\hat{r}_n = 5000 + 0,6*3000$; $\hat{r}_f = 10000 + 0,2*3000$; \hat{r}_{vs} y \hat{r}_{vg} los hacemos valer cero.

*(NOTA: Se agrega la suma $0,2*3000$ porque se considera que las 3000 millas se las alcanzan a dar antes de que le cambien el estatus, sin embargo, si alguien no las sumo porque pensó que las 3000 millas se dan cuando el cambio de estatus ha finalizado no descontarle puntaje porque esa forma de verlo también es válida).*

Por su parte $W + g = \hat{r} + PW$; g vale cero, ya que π de los transientes es cero y g de los recurrentes es cero

$$\begin{pmatrix} W_r \\ W_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{r}_{tran} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} Prec - rec & Prec - t \\ Pt - rec & Pt - t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} W_r \\ W_t \end{pmatrix}$$

con $W_r = 0 \Rightarrow W_r = 0$; $Prec - t$ por definición es cero

Luego

$$W_t = \hat{r}_{tran} + Pt - t * W_t \Rightarrow W_t = (It - Pt - t)^{-1} \hat{r}_{tran}$$

$$\text{Luego } V(n) = nge + w + P^n (V(0) - W) \quad / \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \quad (g \text{ es cero})$$

$$V(n) = W - \pi W = W = \begin{pmatrix} 0 \\ W_t \end{pmatrix}$$

(NOTA: no es necesario hacer todo este desarrollo si alguien llega y pone el resultado final esta bien, porque esa persona logró darse cuenta de la analogía señalada al comienzo)

Así reemplazando los valores se llega a:

$$W_t = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/5 & 4/5 & -3/5 \\ 0 & -1/2 & 7/10 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4500 \\ 6800 \\ 10600 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 13/3 & 35/6 & 5 \\ 7/3 & 35/6 & 5 \\ 5/3 & 25/6 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 4500 \\ 6800 \\ 10600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 336500/3 \\ 309500/3 \\ 266500/3 \end{pmatrix}$$

Y como se señala que siempre se parte de poco frecuente el cliente acumuló en valor esperado 112166,666 millas antes de pasar a ser cliente vip.

Si es que no sumaron los $0,2 \cdot 3000$, el resultado es $327500/3 = 109166,666$.

También alguien pudo haber decidido no incluir el $0,2 \cdot 3000$, y al final sumarle los 3000, en tal caso el resultado sería: 112166,666 millas (al mismo que habiendo considerado el $0,2 \cdot 3000$)

(0,4 por haber tenido la idea, 0,4 más por haber hecho bien los cálculos y 0,7 más por haber sabido concluir, aunque se haya equivocado en los cálculos)