Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Rey
Aux: F.Castro, R. Lagos, L.Reus, R. Wolf

Clase Auxilliar 13, 26 de Septiembre de 2006

Cadenas de Markov en Tiempo Discreto

Problema 1, Control 2 Otoño 2005

1. La forma de esta cadena se muestra en la siguiente figura:

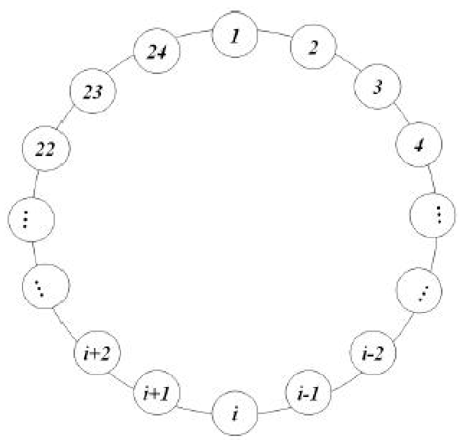
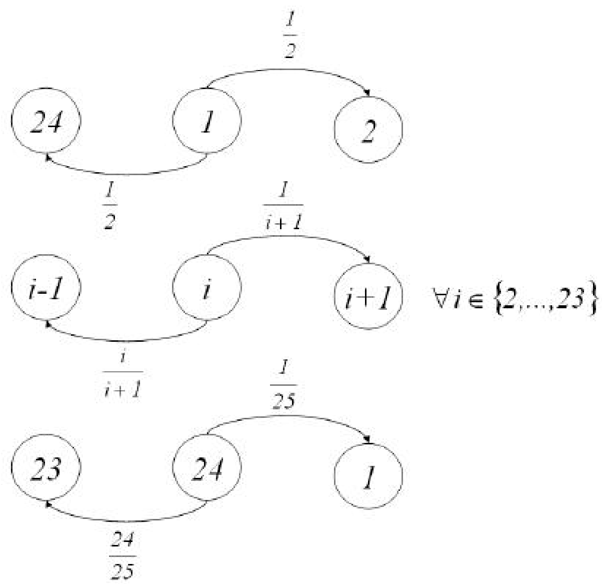


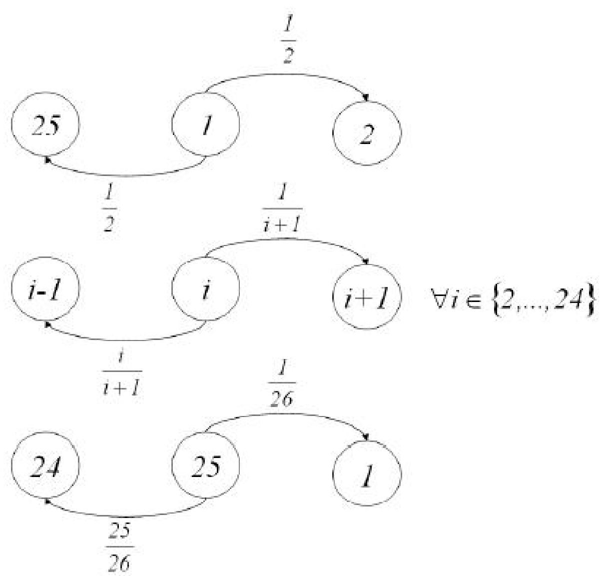
Figura 1: Cadena de Markov

Las probabilidades de transición se definen de la siguiente forma:



Los 24 estados de la cadena pertenecen a su única clase recurrente, esta clase tiene período 2, por lo que no es érgodica, razón por la que esta cadena **no** admite probabilidades estacionarias.

2. Al tener la línea del metro 25 estaciones en lugar de 24, la forma de la cadena es la misma que la del caso anterior, cambia, sin embargo, la definición de algunos casos. Luego, las probabilidades de transición son las que siguen:



Todos los estados pertenecen a una única clase recurrente que, en este caso, al ser el nmero de estados impar, es aperiódica, por lo que esta cadena admite probabilidades estacionarias.

El sistema de ecuaciones que permite calcularlas es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
\pi_1 &= \pi_{25} \cdot \frac{1}{26} + \pi_2 \cdot \frac{2}{3} \\
\pi_i &= \pi_{i-1} \cdot \frac{1}{i} + \pi_{i+1} \cdot \frac{i+1}{i+2} \quad \forall\ i \in 2, \ldots, 24 \\
\pi_{25} &= \pi_{24} \cdot \frac{1}{25} + \pi_1 \cdot \frac{1}{2} \\
\sum_{i=1}^{25} \pi_i &= 1
\end{aligned}
$$

3. Es necesario darse cuenta de que Armijo permanece 2 minutos en cada estación luego, en 2 minutos en la *i-ésima* estación roba especies avaluadas en $\$EH_i$, de esta forma el valor esperado preguntado es:

$$V = \sum_{i=1}^{25} \pi_i \cdot EH_i$$

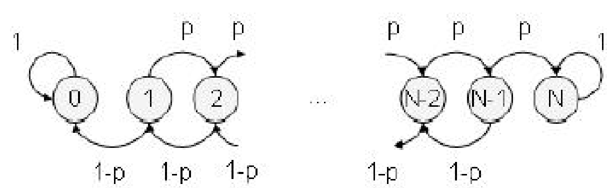
4. En el largo plazo la probabilidad de que Armijo esté en la i-ésima estación está dada por π_i, la probabilidad estacionaria del estado que represaenta esa situación, luego:

P(Armijo esté entre la *(n-2)-ésima* y *n-ésima* estación)= $\frac{\pi_{n-2}+\pi_{n-1}+\pi_n}{\sum_{i=1}^{n} \pi_i}$

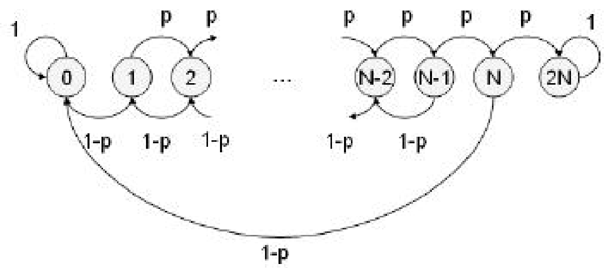
5. Se puede apreciar que la probabilidad, estando en i, es mayor para ir a $i-1$ que para ir a $i+1$, esto es válido para todos los estados salvo para $i = 1$, en que la Armijo decide equiprobablemente entre ir a 2 y 24 luego, Armijo tiende a ir siempre de forma que los números de las estaciones son decendentes, salvo cuando llega a 1, en que decide de forma equiprobable. Por esta razón es más probable que se encuentre en las 5 primeras estaciones que en las 5 últimas, por lo que se debe recomendar a King la **Estrategia A**.

Problema 2, La Ruina del Jugador

1. La cadena es la siguiente:



2. La cadena es la siguiente:



3. Sea:

$$f_i = P[\text{Ganar dado que parto con i unidades}]$$

Inmediatamente vemos que $f_0 = 0$ y que $f_N = 1$. De la misma forma vemos (condicionando en el resultado de la primera apuesta) que:

$$f_i = \frac{1}{2}f_{i+1} + \frac{1}{2}f_{i-1} \qquad \forall 0 < i < N$$

lo que implica que:

$$f_{i+1} - f_i = f_i - f_{i-1} \qquad \forall 0 < i < N$$

La primera ecuación nos dice que:

$$f_2 - f_1 = f_1$$

Utilizando esto vemos que:

$$f_i - f_{i-1} = f_1$$

Ahora si sumamos las $N-1$ primeras ecuaciones tendremos que (utilizando la suma telescópica):

$$f_N - f_1 = (N-1) \cdot f_1 \Rightarrow f_1 = \frac{1}{N}$$

De la misma forma si sumamos las $i-1$ primeras restricciones veremos que:

$$f_i = i \cdot f_1 = \frac{i}{N}$$

4. Para el caso general procederemos exactamente como lo hicimos para el caso particular:

$$f_i = p \cdot f_{i+1} + (1-p) \cdot f_{i-1} \qquad \forall 0 < i < N$$

lo que implica que:

$$f_{i+1} - f_i = \rho(f_i - f_{i-1}) \qquad \forall 0 < i < N$$

Donde $\rho = \frac{1-p}{p}$ La primera ecuación nos dice que:

$$f_2 - f_1 = \rho f_1$$

Utilizando esto vemos que:

$$f_i - f_{i-1} = \rho^{i-1} f_1$$

Ahora si sumamos las $N-1$ primeras ecuaciones tendremos que (utilizando la suma telescópica):

$$f_N - f_1 = (\sum_{i=1}^{N-1} \rho^i) \cdot f_1 \Rightarrow f_1 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{N-1} \rho^i} = \frac{1-\rho}{1-\rho^N}$$

De la misma forma si sumamos las $i-1$ primeras restricciones veremos que:

$$f_i = (\sum_{k=0}^{N-1} \rho^k) \cdot f_1 = \frac{1-\rho^i}{1-\rho^N}$$