Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Rey
Aux: F.Castro, R.Lagos, L.Reus, R.Wolf

Clase Auxilliar 13, 26 de Septimebre de 2006

Cadenas de Markov en Tiempo Discreto

Problema 1, Control 2 Otoño 2005

Armijo, un peligroso criminal que ha escapado recientemente de la cárcel, al verse perseguido por la policía decidió entrar en la línea del metro, con la intención de confundirse entre los numerosos pasajeros que utilizan este transporte público.

De acuerdo a King, un reconocido detective, la línea del metro consta de 24 estaciones, y tiene la particularidad de que se puede viajar directamente de ida y vuelta entre sus estaciones terminales[1]. Es posible viajar, desde cada estación a cualquiera de las dos estaciones contiguas, es decir, de cada estación salen trenes en ambos sentidos.

Armijo se ha dado cuenta de que King lo ha seguido hasta el metro por lo que ha decidido viajar erráticamente dentro de la red del metro.

Si se designan las estaciones por los números $1, 2, 3, \ldots, 24$ las probabilidades que describen el desplazamiento de este peligroso criminal en la red del metro son las siguientes:

$$
\begin{aligned}
P_{i,i+1} &= \frac{1}{i+1} \quad \forall i \in 1, \ldots, 23 \\
P_{i,i-1} &= \frac{i}{i+1} \quad \forall i \in 2, \ldots, 24 \\
P_{24,1} &= \frac{1}{25} \\
P_{1,24} &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Ademas, dado que sólo se puede ir directamente entre estaciones contiguas, si i y j no son estaciones contiguas, entonces $P_{ij} = 0$. Recuerde que la estación i es contigua con las estaciones $(i-1)$ e $(i+1)$ si $2 \leq i \leq 23$, que la estación 1 es contigua a las estaciones 2 y 24 y que la estación 24, lo es a las estaciones 1 y 23. También $P_{i,i} = 0$ para todas las estaciones $i = 1, \ldots, 24$.

Conociendo la forma en que Armijo se moviliza dentro de la red del metro, el famoso detective, haciendo uso de sus conocimientos, decide modelar la ubicación del criminal utilizando una cadena de Markov en tiempo discreto, utilizando como supuesto que de cada estación sale un tren en cada dirección posible cada exactamente 2 minutos y que los tiempos de viaje entre cada estación son despreciables.

1. (1,5 Ptos.) Modele la ubicación de Armijo como una cadena de Markov en tiempo discreto, clasifique los estados en clases. ¿Admite esta cadena probabilidades estacionarias? ¿Por qué? Si la respuesta fuera afirmativa, plantee las ecuaciones que permiten obtenerlas[2].

[1] Como si en la línea 1 del metro de Santiago las estaciones *Escuela Militar* y *San Pablo* tuvieran conexión directa.
[2] Explicite sólo los casos interesantes, NO es necesario dibujar toda la cadena.

Luego de desarrollar el modelo anterior, el detective se ha dado cuenta de que la red consta, en realidad, con 25 estaciones[3], las probabilidades de transición se extienden trivialmente del caso anterior.

2. (1,5 Ptos.) Ante esta nueva situación, modele la ubicación de Armijo como una cadena de Markov en tiempo discreto, clasifique los estados en clases. ¿Admite esta cadena probabilidades estacionarias? ¿Por qué? Si la respuesta es afirmativa, plantee las ecuaciones que permiten obtenerlas.

Junto con escapar, Armijo no olvida sus antiguos días, por lo que en cada estación hurta valiosas pertenencias de los usuarios del metro. En la estación j hurta especies por un valor $\$EH_j$.

3. (1,0 Pto.) ¿Cuál es el valor esperado del total de objetos que este hábil criminal en dos minutos en el largo plazo?
4. (1,0 Pto.) ¿Luego de más de 5 horas de fallidos esfuerzos, el detective no ha podido encontrar a Armijo, pero sabe que se encuentra en alguna de las primeras n estaciones $(2 < n < 25)$. Dada esta información, ¿Cuál es la probabilidad de que Armijo se encuentre entre la $(n-2)$-ésima y la n-ésima estación (inclusive).
5. (1,0 Pto.) Luego de 7 horas, King aún no logra dar con Armijo, por lo que considera 2 estrategias a seguir:
   - **Estrategia A:** Visitar alguna de las primeros 5 estaciones.
   - **Estrategia B:** Visitar alguna de las últimas 5 estaciones.

   ¿Qué estrategia recomendaría usted a King? ¿Por qué?

Problema 2, La Ruina del Jugador

Considere un jugador que apuesta sucesivas veces en el mismo juego. En cada jugada existe una probabilidad p de ganar una unidad y una probabilidad $1-p$ de perder una unidad. Se asume que las jugadas sucesivas son independientes. El jugador comienza con una cantidad de i, $1 < i < N$ y juega hasta que pierde todo o llega a N.

1. Construya una cadena de Markov que describa la fortuna del jugador en cada instante. Incluya las probabilidades de transición.
2. El jugador al llegar a N cambia su estrategia y decide apostar doble o nada, de manera que con probabilidad p su riqueza es $2N$ (y se retira), mientras con probabilidad $1-p$ pierde todo (y su riqueza se reduce a cero). Modele esta nueva situación.
3. Si en la situación de la parte (a), la probabilidad de ganar es $p = 1/2$, ¿De qué depende que nuestro jugador finalmente gane o pierda?. Sin hacer cálculos entregue valores específicos cuando se pueda e interprete sus resultados.
4. Resuelva el problema para el caso general, es decir, encuentre las probabilidades de terminar ganando o perdiendo el juego si se empieza con una cantidad de i, $1 < i < N$. Se juega hasta que pierde todo o llega a N, con $p \neq (1-p)$.

[3] En todas las partes que siguen, considere que la red tiene 25 estaciones.