Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

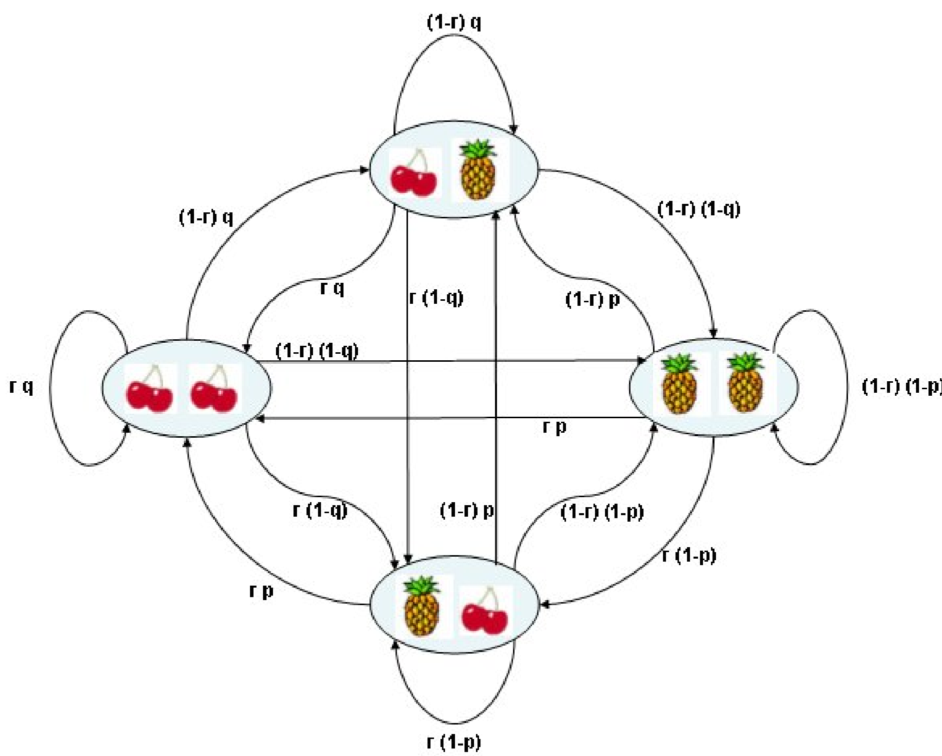
IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, S. Hernández, P. Rey
Aux: F. Castro, R.Lagos, L.Reus, R.Wolf

Clase Auxilliar 14, 2 de Octubre de 2006

Repaso Control 1

Problema 1, CTP 5 Otoño 2003

1. Los estados y las probabilidades de transición entre ellos son los que se indican en el siguiente grafo:



   Vemos que existe una única clase recurrente, aperíodica, conformada por la totalidad de los estados de la cadena. Las probabilidades de transición deben ser justificadas por separado.

2. La cadena es finita y existe una única clase recurrente, aperíodica, por lo tanto existirá una ley de probabilidades estacionarias. Para encontrar el valor de estas probabilidades simplemente calculamos una ley estable (la única):

$$
\begin{aligned}
P_{GG} &= r \cdot q \cdot P_{GG} + r \cdot q \cdot P_{GP} + r \cdot p \cdot P_{PG} + r \cdot p \cdot P_{PP} \\
P_{GP} &= (1-r) \cdot q \cdot P_{GG} + (1-r) \cdot q \cdot P_{GP} + (1-r) \cdot p \cdot P_{PG} + (1-r) \cdot p \cdot P_{PP} \\
P_{PG} &= r \cdot (1-q) \cdot P_{GG} + r \cdot (1-q) \cdot P_{GP} + r \cdot (1-p) \cdot P_{PG} + r \cdot (1-p) \cdot P_{PP} \\
P_{PP} &= (1-r) \cdot (1-q) \cdot P_{GG} + (1-r) \cdot (1-q) \cdot P_{GP} + (1-r) \cdot (1-p) \cdot P_{PG} + (1-r) \cdot (1-p) \cdot P_{PP} \\
1 &= P_{GG} + P_{GP} + P_{PG} + P_{PP}
\end{aligned}
$$

3. Dado que la máquina ha sido utilizada por mucho tiempo podemos suponer que hemos alcanzado el estado estacionario (recuerden que no miramos la situación actual del traga monedas). De esta manera la distribución de probabilidades del resultado de mi tirada será la distribución de la ley de probabilidades estacionarias. Entonces, la probabilidad de ganar es la probabilidad de encontrar la máquina en un estado donde ambos símbolos sean iguales y además realizar la elección correcta. Esto es:

$$\begin{aligned} P[Ganar] &= P[\text{Escoger Guinda-Guinda}] \cdot P_{GG} + P[\text{Escoger Piña-Piña}] \cdot P_{PP} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (P_{GG} + P_{PP}) \end{aligned}$$

Entonces:

$$E[Utilidades] = \frac{1}{2} \cdot (P_{GG} + P_{PP}) \cdot G - [1 - \frac{1}{2} \cdot (P_{GG} + P_{PP})] \cdot (C + T)$$

4. Nuevamente, dado que la máquina lleva mucho tiempo funcionando suponemos que el resultado de la próxima tirada se rige de acuerdo a la ley de probabilidades estacionarias. Si es así, los únicos estados que nos permiten obtener una ganancia son los estados Guinda-Piña y Piña-Guinda. Entonces:

$$P[ganar] = P_{GP} + P_{PG}$$

De esta forma:

$$E[Utilidades] = P_{GP} + P_{PG} \cdot G - [1 - P_{GP} + P_{PG}] \cdot (C + T) - W$$

Problema 2

Sea v la velocidad del auto entrando en el tiempo t, por lo que se tiene que el tiempo de viaje a velocidad v será $t_v = \frac{L}{v}$ donde L es el largo de la carretera.

Si definimos G como la distribución del tiempo de viaje, y dado que $T \equiv \frac{L}{X}$ es el tiempo de viaje cuando la velocidad es X, se tendrá que $G(x) = 1 - F(\frac{L}{x})$, con F la distribución de la velocidad.

Consideremos un evento a un auto que entra a la carretera, el que contaremos si se encuentra con el auto entrando en t. Independiente de los demás, un evento ocurriendo en un instante s con $s < t$ (auto entrando a la carretera en s) será contado con probabilidad $P[s + T > t + t_v]$. De la misma manera, un evento ocurriendo en un instante s con $s > t$ será contado con probabilidad $P[s + T < t + t_v]$.

Así, se puede escribir la probabilidad que un evento que ocurre en un instante s sea contado como:

$$p(s) = \begin{cases} 1 - G(t + t_v - s) & \text{si } s < t, \\ G(t + t_v - s) & \text{si } s > t, \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

De esta manera el número de encuentros de un auto ingresando en t será un proceso de Poisson filtrado tal que:

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^\infty p(s)ds &= \lambda \int_0^t [1 - G(t + t_v - s)]ds + \int_t^{t+t_v} G(t + t_v - s)ds \\ &= \lambda \int_{t_v}^{t+t_v} [1 - G(y)]dy + \int_0^{t_v} G(y)dy \end{aligned}$$

Ahora sólo basta con minimizar esta expresión derivando e igualando a 0.

$$\frac{d}{dt_v} \left\{ \lambda \int_0^\infty p(s)ds \right\} = \lambda \Big[[1 - G(t + t_v)] - [1 - G(t_v)] + G(t_v) \Big]$$

Donde se tiene que $G(t_v) = \frac{1}{2}$ dado que cuando t tiende a infinito $G(t + t_v) \approx 1$. De esta manera, el óptimo tiempo de viaje es el tiempo medio, y por lo tanto la velocidad que minimiza los encuentros es la mediana de la distribución de velocidades.

Problema 3, Control 2 Otoño 2005

a) Si Armijo corre a una velocidad W demorará A/W en cruzar cada pista. Luego de dejar pasar el primer auto por la pista sur correrá y será atropellado si la distancia entre los autos no es la suficiente para cruzar completamente esta pista. Entonces:

$$\begin{aligned} P[\text{Muera atropellado pista sur}] &= P[\text{Tiempo entre autos } \leq \frac{A}{W}] \\ &= P[\text{Distancia entre autos } \leq V \cdot \frac{A}{W}] \\ &= 1 - e^{-\lambda_s \cdot V \cdot \frac{A}{W}} \end{aligned}$$

(Notar entonces que el tiempo entre automóviles en la pista sur distribuye según una exponencial de parámetro $(\lambda_s V)$; para la pista norte se puede obtener un resultado análogo).

De llegar al medio deberá enfrentar la misma situación en la pista hacia el norte. Entonces, la probabilidad de morir atropellado será:

$$\begin{aligned} P[\text{Morir}] &= P[\text{Morir pista sur}] + P[\text{No Morir pista sur}] \cdot P[\text{Morir pista Norte}] \\ &= 1 - e^{-(\lambda_n + \lambda_s) \cdot V \cdot \frac{A}{W}} \end{aligned}$$

b) En la versión simplificada de la estrategia Armijo corre si es que no se encuentra con un automóvil pasando. Dado que el tiempo entre el paso de dos automóviles por una misma pista es proporcional a la distancia entre ellos (velocidad constante), el tiempo también se distribuye de manera exponencial. Por lo tanto el tiempo entre pasada de automóviles tiene pérdida de memoria. Esto significa que "no tiene sentido esperar" por el paso de un automóvil para correr, dado que la distribución del tiempo entre la pasada del primer auto y la llegada del segundo (que ve Armijo) es la misma que la del tiempo de la próxima llegada cuando Armijo llega al borde de la pista.

Entonces, ambas estrategias tienen asociada la misma probabilidad de muerte para Amrijo, sólo que la versión simplificada siempre obtiene tiempos de cruce menores o iguales a la estrategia original y, por lo tanto, la domina.

c) Como vimos en la parte anterior el tiempo de pasada del próximo auto por la pista sur es exponencial (tasa $\lambda_s \cdot V$). Lo mismo se repite para la pista norte (tasa $\lambda_n \cdot V$). Por lo tanto, el tiempo de la próxima de pasada (mínimo entre la pasada sur y la norte) se distribuye exponencial con tasa $(\lambda_s + \lambda_n) \cdot V$. Entonces, sea T el tiempo que Armijo demora en cruzar la carretera. Calculemos la esperanza de T condicionando sobre el tiempo t^* que demorará en pasar el próximo automóvil (cualquier pista).

$$
\begin{aligned}
E[T] &= \int_o^{\infty} E[T|t^*=x](\lambda_s+\lambda_n)\cdot V\cdot e^{-(\lambda_s+\lambda_n)\cdot V\cdot x}dx \\
&= \int_o^{2\frac{A}{W}} E[T|t^*=x](\lambda_s+\lambda_n)\cdot V\cdot e^{-(\lambda_s+\lambda_n)\cdot V\cdot x}dx + \int_{2\frac{A}{W}}^{\infty} 2\frac{A}{W}\cdot(\lambda_s+\lambda_n)\cdot V\cdot e^{-(\lambda_s+\lambda_n)\cdot V\cdot x}dx \\
&= \int_o^{2\frac{A}{W}} (E[T]+x)(\lambda_s+\lambda_n)\cdot V\cdot e^{-(\lambda_s+\lambda_n)\cdot V\cdot x}dx + 2\frac{A}{W}\cdot e^{-(\lambda_s+\lambda_n)\cdot V\cdot 2\frac{A}{W}} \\
&= E[T]\cdot(1-e^{-(\lambda_s+\lambda_n)\cdot V\cdot 2\frac{A}{W}}) + \frac{1}{(\lambda_s+\lambda_n)\cdot V}\cdot(1-e^{-(\lambda_s+\lambda_n)\cdot V\cdot 2\frac{A}{W}}) \\
&= \frac{1}{(\lambda_s+\lambda_n)\cdot V}\cdot(e^{(\lambda_s+\lambda_n)\cdot V\cdot 2\frac{A}{W}}-1)
\end{aligned}
$$

d) Supondremos que en $t=0$ no se encuentran automóviles pasando frente a Armijo. Sea $\{A(t), t\geq 0\}$ el proceso de conteo de autos (yendo al sur) de Armijo y Z_n el instante de pasada de el automóvil n. Considerando que un automóvil demora un tiempo $\frac{L}{V}$ en pasar "completo" frente a Armijo, para este proceso de conteo se cumple que:

$$A(t)\geq n \Leftrightarrow Z_n \leq t-\frac{L}{V}$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
P[A(t)\geq n] &= P[Z_n\leq t-\frac{L}{V}] \\
&= P[\sum_{i=1}^{n} x_i + (n-1)\frac{L}{V} \leq t-\frac{L}{V}] \\
&= P[\sum_{i=1}^{n} x_i + \leq t-n\cdot\frac{L}{V}] \\
&= P[N(t-n\cdot\frac{L}{V})\geq n]
\end{aligned}
$$

En la expresión anterior las variables x_i son v.a. exponenciales de parámetro $\lambda_s\cdot V$, i.i.d. y $\{N(t), t\geq 0\}$ corresponde a un proceso de Poisson homogéneo de tasa $\lambda_s\cdot V$.
De allí se puede concluir cual es la probabilidad pedida. Las respuestas pueden cambiar dependiendo de los supuestos considerados; las expresiones finales dependerán de si se expresan en función de la distribución de una gamma (integral) o mediante la distribución de poisson (sumatoria). Con ello, dos expresiones equivalentes para la expresión final son:

$$
\begin{aligned}
P[A(t)\geq n] &= \int_0^{t-n\cdot\frac{L}{V}} \frac{(\lambda_s V)^n\cdot x^{n-1}\cdot e^{-\lambda_s V\cdot x}}{(n-1)!}dx \\
&= \sum_{i=n}^{\infty} \frac{(\lambda_s\cdot V(t-n\cdot\frac{L}{V}))^i e^{-\lambda_s\cdot V(t-n\cdot\frac{L}{V})}}{i!}
\end{aligned}
$$

Por último, notar que para $t\leq n\cdot\frac{L}{V}$ la probabilidad pedida es 0.

e) Analicemos la pista sur y supongamos que cuando Armijo mira a la distancia obvervará (si puede) el punto más cercano del auto (su parte trasera). Si se ha visto un auto completo este puede estar hasta una distancia $V\cdot t-L$. Esto es equivalente a que el auto haya entrado entre los instantes 0 y $t-\frac{L}{V}$. Entonces si sabemos que entró un auto en ese intervalo también sabemos que la distribución del instante de llegada es uniforme entre 0 y $t - \frac{L}{V}$. Por otro lado, para que el automóvil aún sea visible éste no debe haber entrado en un tiempo superior a $\frac{K+L}{V}$. Entonces:

$$P[\text{Ver el auto}] = \frac{K+L}{t \cdot V - L}$$

Notar que aun cuando consideramos que Armijo está viendo los autos que pasan en la pista sur, los resultados son los mismos para las dos pistas (no nos interesa condicionar sobre que pista paso el automóvil).