



Clase Auxilliari 14, 2 de Octubre de 2006

Repaso Control 1

Problema 1, CTP 5 Otoño 2003

En un famoso casino, existe un traga monedas con sólo dos ventanas, en cada una de las cuáles puede aparecer una piña o un guinda. Dado los años de uso es sabido que la máquina está descalibrada y opera de la siguiente manera: cada vez que un jugador inserta una ficha y tira de la palanca, las dos ventanas funcionan en forma independiente. La probabilidad que en la segunda ventana a aparezca una guinda es siempre r , en cambio en la primera ventana la probabilidad que aparezca una guinda es q , si antes había aparecido una guinda, y p si antes había aparecido una piña.

El sistema de apuesta es el siguiente: Antes de ingresar la moneda de C [u.m.] usted debe predecir el resultado **exacto**¹ de la jugada. Si acierta recupera la inversión y gana G [u.m.] adicionales. De lo contrario pierde la inversión y debe pagar T [u.m.] adicionales.

1. (2,5 pts) Modele los resultados de la máquina traga monedas como una cadena de Markov en tiempo discreto. Indique claramente los estados, clases y probabilidades de transición, justificando cada una de ellas.
2. (1,5 pts) Justifique la existencia de probabilidades estacionarias y plantee el sistema de ecuaciones que le permitiría encontrarlas (no es necesario calcularlas).
3. (1,0 pts) Suponga que usted llega al casino y encuentra el traga monedas desocupado (luego de haber sido utilizado durante “mucho” tiempo). Sin ver el estado actual de la maquina, usted escoge equiprobablemente cualquiera de los posibles resultados en que las 2 ventanas son iguales y tira de la palanca. ¿Cuál es el valor esperado de los beneficios de esta jugada?. (Suponga conocidas las probabilidades estacionarias).
4. (1,0 pts) Ahora suponga que pagando W [u.m.] adicionales (inversión que no se recupera) usted puede retrasar su apuesta hasta una vez conocido el resultado de la primera ventana. Así, su decisión consiste en predecir si el resultado de la segunda ventana es igual o diferente al de la primera. Considere que su estrategia es decir siempre la figura contraria a la de la primera ventanilla y el traga monedas lleva funcionando “mucho” tiempo. ¿Cuál es el valor esperado de los beneficios de esta nueva estrategia de juego bajo este nuevo sistema?.

Problema 2, Poisson No Homogéneo

Suponga que autos entran en una carretera de un solo sentido y de un largo L , de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ . Cada auto viaja a velocidad constante determinada aleatoriamente, independientemente de los otros autos, mediante una distribución F . Cuando un auto se encuentra con un auto más lento, lo sobrepasa sin pérdida de tiempo. Suponga que un auto entra a la carretera en el instante t . Sea t_v el tiempo que demora este vehículo en recorrer la carretera y sea G la distribución del tiempo que demora un vehículo cualquiera en recorrer la carretera. Muestre que cuando $t \rightarrow \infty$ la velocidad del auto que minimiza el número de encuentros con otros autos, donde un encuentro con un auto se produce cuando el auto es sobre pasado o sobrepasa a otro, es tal que $G(t_v) = 1/2$.

¹Esto es predecir correctamente la figura de la primera ventana y la figura de la segunda ventana

Problema 3, Control 2 Otoño 2005

Considere la situación de Armijo Catalán, quien vive al costado de una de las recientemente inauguradas autopistas concesionadas. Armijo debe, al comienzo de cada día, caminar hasta la pasarela más cercana con el propósito de cruzar la carretera y de esa forma tomar locomoción que lo lleve a su lugar de trabajo. El problema de Armijo es que la pasarela más cercana se encuentra a 3 km de distancia.

Armijo ha llegado constantemente tarde a su trabajo por lo que ha sido advertido por su empleador de que el próximo retraso desencadenará irremediablemente su despido.

Lamentablemente esta mañana Armijo se ha levantado nuevamente tarde y su única opción para evitar un nuevo retraso es cruzar la carretera directamente, sin caminar hasta la pasarela.

Para empeorar las cosas, esta mañana existe una neblina tal que Armijo sólo puede ver los vehículos cuando pasan frente a él. Además considere que los automovilistas tampoco ven a Armijo.

Armijo, que ha observado por varias horas el flujo vehicular a esas horas de la mañana, ha logrado recopilar los siguientes datos:

- Ambas vías, la que va hacia el sur (que es la primera que debe enfrentar Armijo) y la que va hacia el norte poseen solo una pista. A lo ancho de cada pista cabe exactamente un vehículo. Consideraremos que los vehículos son *idénticos*: tienen largo L , ancho A y viajan a rapidez constante V .
- La distancia entre la parte de atrás de un vehículo y la parte delantera del próximo en pasar (por la misma pista) se distribuye como una variable aleatoria exponencial de parámetro λ_s para la pista hacia el sur y parámetro λ_n para la pista hacia el norte.
- Entre ambas pistas existe un bandejón con el espacio exacto para que quepa una persona, sin ser pasada a llevar por los vehículos de ambas pistas. El ancho de este bandejón es una distancia despreciable con respecto al ancho de las pistas.

Considerando dicha información, Armijo se decide a cruzar la carretera. Para esto ocupará la siguiente estrategia: Esperará que pase el próximo auto hacia el sur y correrá hasta el bandejón central. Luego esperará que pase el siguiente auto hacia el Norte y cruzará corriendo (considere que Armijo corre a una velocidad W y que es extremadamente flaco).

1. (1,0 Pto.) ¿Cuál es la probabilidad de que Armijo muera atropellado?
2. (1,0 Pto.) Comente la estrategia de Armijo y compárela con la versión simplificada “corre si es que puedes”².

Tras algunos minutos en que ningún auto ha pasado, Armijo nota que la neblina se despeja, por lo que modifica su estrategia a “no morir”³.

3. (1,5 Ptos.) Calcule el tiempo esperado que Armijo demorará en cruzar la carretera si él decide que durante el lapso de tiempo que se encuentre cruzando la carretera no debe pasar ningún automóvil (por ninguna de las pistas).

Finalmente Armijo se confunde y decide aceptar el hecho de que llegará tarde al trabajo y que será despedido. Con esto Armijo decide no intentar cruzar la carretera y dedicará la tarde a contar automóviles.

²Esto es: Cruzar la pista sur si no hay ningún vehículo pasando frente a Armijo. Una vez que cruza esta primera pista, repite el procedimiento en la pista norte.

³Esto es: no cruzar una pista si el próximo vehículo que pasará arrollará a Armijo (suponga que Armijo es capaz de determinar con certeza la distancia entre dos puntos cualesquiera).

4. (1,5 Ptos.) ¿Cuál es la probabilidad que tras t horas de observación haya visto pasar más de N automóviles yendo hacia el sur? ⁴
5. (1,0 Pto.) Considere ahora que Armijo sólo distingue objetos que se encuentran a una distancia de hasta K km. Si tan sólo un automóvil ha pasado (completo) tras t horas de observación, ¿cuál es la probabilidad de que Armijo aún pueda distinguirlo a la distancia?

⁴Considere que Armijo “ha visto pasar” un auto, cuando el auto ha pasado completamente frente a lugar donde Armijo se encuentra.