Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Rey
Aux: F. Castro, R. Lagos, L. Reus, R. Wolf

Solución Clase Auxiliar 11, 6 de septiembre de 2006

Procesos de Poisson

Problema 1

1) Sea N(t) = N° de autos que llegan en t
X = N° de estacionamientos
T = 10 hrs.

Se tiene:

$$E(Ingresos) = \sum_{i=1}^{X-1} i \cdot b \cdot P(N(T)=i) + b \cdot X \cdot \sum_{i \geq X} P(N(T)=i)$$

$$E(Costos) = A \cdot b \cdot X$$

Se resuelve:

$$Max E(Ingresos - Costos)$$

2) X=500

$$P(\text{estacionamiento lleno}) = P(N(T) \geq 500) = \sum_{k=500}^{\infty} P(N(T)=k)$$

3) $$E(\text{autos estacionados}) = \sum_{k=1}^{499} k \cdot P(N(T)=k) + 500 \cdot \sum_{k \geq 500} P(N(T)=k)$$

4) $$P(N(10,15) < X) = \sum_{k=1}^{499} P(N(T)=k)$$

Problema 2

1) Sea T el tiempo de pasada del siguiente bus. Por la pérdida de memoria de la exponencial se tiene que $T \rightarrow \exp(\lambda)$.

$$P(\text{camine}) = P(T > s) = e^{-\lambda \cdot s} = P(N(s)=0)$$

2) Sea T_v el tiempo de viaje,

$$t \leq s \Rightarrow T_v = t + R$$

$$t > s \Rightarrow T_v = t + W$$

3) $E(T_v) = R + \frac{1}{\lambda} + e^{-\lambda s} \cdot (W - R - \frac{1}{\lambda})$

4) $W < \frac{1}{\lambda} + R \Rightarrow e^{-\lambda s} \cdot (W - R - \frac{1}{\lambda}) < 0 \Rightarrow E(Tv)$ es mínimo para s=0;

$W < \frac{1}{\lambda} + R \Rightarrow e^{-\lambda s} \cdot (W - R - \frac{1}{\lambda}) < 0 \Rightarrow E(Tv)$ es máximo para s=∞.

5) s=0 $\Leftrightarrow$ no espera nada,
s=∞ $\Leftrightarrow$ espera siempre.
Por la pérdida de memoria, en cada instante siempre hay esperanza $\frac{1}{\lambda}$ que pase el bus.

Problema 3

$$\begin{aligned} N(t) &= \text{número de personas que han llegado a comprar entradas desde 0 hasta } t. \\ N_n(t) &= \text{número de personas que han llegado a comprar entradas sin ser socios desde 0 hasta } t. \\ N_m(t) &= \text{número de personas que han llegado a comprar entradas siendo socios desde 0 hasta } t. \end{aligned}$$

a)

$$\begin{aligned} P(N_m(4) = i | N(4) = n) &= \frac{P(N_m(4) = i \wedge N(4) = n)}{P(N(4) = n)} \\ &= \frac{P(N_m(4) = i) P(N_n(4) = n - i)}{P(N(4) = n)} \\ &= \frac{\frac{(0{,}25\lambda 4)^i e^{-0{,}25\lambda 4}}{i!} \frac{(0{,}75\lambda 4)^{n-i} e^{-0{,}75\lambda 4}}{(n-i)!}}{\frac{(\lambda 4)^n e^{-\lambda 4}}{n!}} \\ &= \binom{n}{i} 0{,}25^i 0{,}75^{n-i} \end{aligned}$$

b) Distinguimos 3 casos:

- Si $n < 200 \Rightarrow P(\text{vender n}) = \frac{(\lambda 4)^n e^{-\lambda 4}}{n!}$
- Si $n = 200 \Rightarrow P(\text{vender n}) = \sum_{k=200}^{\infty} \frac{(\lambda 4)^k e^{-\lambda 4}}{k!}$
- Si $n > 200 \Rightarrow P(\text{vender n}) = 0$

c) Sea u = utilidad de una función. Entonces:

$$E(u) = \sum_{k=0}^{\infty} E(u|N(4) = k)P(N(4) = k)$$

pero:

- Si $k \leq 199$

$$E(u|N(4) = k) = \sum_{i=1}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ i \end{array} \right) 0{,}25^i 0{,}75^{n-i}((k-i)p + i0{,}8p)$$

- si $k \geq 200$

$$E(u|N(6) = k) = \sum_{i=1}^{k} \left(\begin{array}{c} 200 \\ i \end{array} \right) 0{,}25^i 0{,}75^{200-i}((200-i)p + i0{,}8p)$$

Como $P(N(4) = k) = \frac{(\lambda 4)^k e^{-\lambda 4}}{k!}$, sólo basta reemplazar.

d) Sean:

$$\begin{aligned} R_i &= \text{Instante de la llegada i-ésima de un cliente normal.} \\ S_j &= \text{Instante de la llegada j-ésima de un “socio”.} \end{aligned}$$

Notar que conocemos las funciones de probabilidad de $R_i \sim \text{Gamma}(i, 0{,}75\lambda)$
y de $S_j \sim \text{Gamma}(j, 0{,}25\lambda)$.
Para que se vendan 50 entradas con descuento deben pasar 2 cosas:

- Que lleguen al menos 50 personas con tarjeta en las 8 horas que está abierta la boletería

- Que el cliente $N^0 50$ que sea socio llegue antes que se cope la capacidad del cine. Esto ocurre si dicho cliente llega antes que el 150-ésimo cliente normal.

Entonces debemos calcular:

$$P(S_{50} \leq R_{150} \leq 8)$$

como conocemos las distribuciones de S_i y R_j, basta con fijar $S_{50} = S$ e integrando sobre S.

$$P(S_{50} \leq R \leq 8) \quad = \quad \int_0^8 \left(\int_S^8 R \frac{\lambda^{151} R^{150} e^{-0{,}75\lambda R}}{150!} dR \right) \frac{0{,}25\lambda^{51} R^{50} e^{-0{,}25\lambda R}}{50!} dS$$