

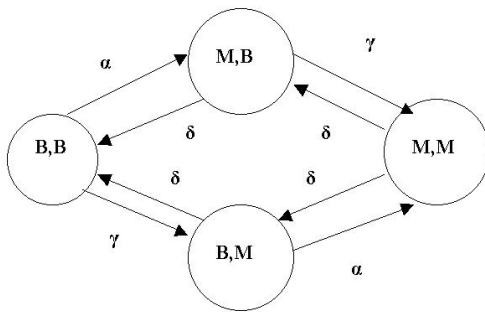


Solucion Auxiliar 17, 25 de octubre 2006

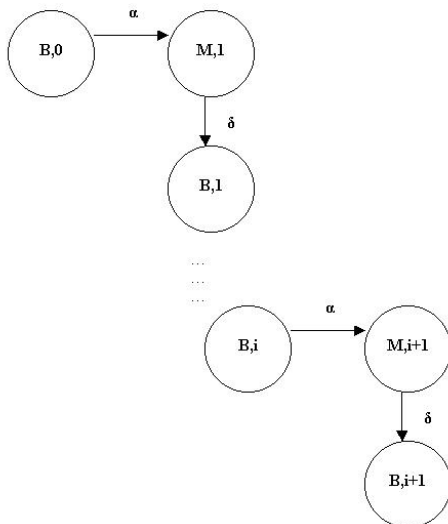
Cadenas de markov Tiempo Continuo

Problema 1

1. Para ver si es una cadena de markov continuo debemos ver si la permanencia de todos los estados sigue una distribución exponencial, o de la misma forma, si el tiempo que se demora en pasar de un estado a otro estado cualquiera tiene distribución exponencial. En este caso se cumple. Por ejemplo, el tiempo que demora en pasar del estado B,B a M,B es el tiempo que demora en fallar la impresion de contenido fijo, el cual se distribuye exponencialmente de tasa α . La cadena es la que se muestra a continuación:

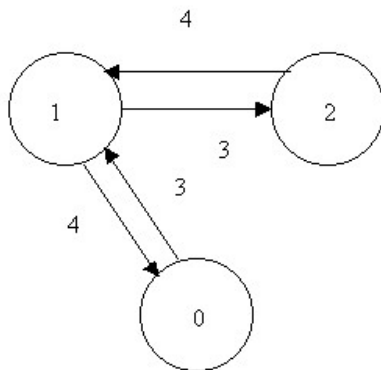


2. En este caso no se tiene una cadena de markov pues el tiempo en pasar del estado (B,i) al (B,i+1) es el tiempo que demoran en producirse 5 hojas, lo cual corresponde a la suma de producir una hoja 5 veces. Cada hoja se demora un tiempo exponencial, pero la suma no es exponencial, sino que sigue una distribución gamma.
3. En este caso si se tiene una cadena de markov. La cadena es la siguiente:



Problema 2

Si se toman las tasas medidas en horas el sistema, la cantidad de personas en el local puede ser representado con la siguiente figura:



Antes de obtener las respuestas, se debe obtener las probabilidades estacionarias, que se obtienen con las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} 3\Pi_0 &= 4\Pi_1 \\ 7\Pi_1 &= 4\Pi_2 + 3\Pi_0 \\ 4\Pi_2 &= 3\Pi_1 \end{aligned}$$

$$\sum_i \Pi_i = 1$$

Lo que lleva a que:

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= \frac{16}{37} \\ \Pi_1 &= \frac{12}{37} \\ \Pi_2 &= \frac{9}{37} \end{aligned}$$

1. Esto es, la cantidad posible de clientes en la pelquería que es 0,1 o 2 con la respectiva probabilidad

$$0\Pi_0 + 1\Pi_1 + 2\Pi_2 = \frac{30}{37}$$

2. Se pide la fracion entre clientes que entran (atendidos por peluquero) y la que llega. Sabemos que en una unidad de tiempo t horas llegan $3t$ clientes. Se entra solo si hay 0 o 1 persona en la peluquera. En t horas entran (valor esperado) $3(\Pi_0 + \Pi_1)t$ personas. Luego la proporción de clientes que entra es:

$$\frac{3(\Pi_0 + \Pi_1)t}{3t} = \Pi_0 + \Pi_1 = \frac{28}{37}$$

3. Ahora la tasa de atencion aumenta a 8 personas la hora. Haciendo nuevamente los cálculos:

$$\begin{aligned}\Pi_0 &= \frac{64}{97} \\ \Pi_1 &= \frac{24}{97} \\ \Pi_2 &= \frac{9}{97}\end{aligned}$$

Los que podría atender en una hora son las personas que entran al local. En una hora entran:

$$3(\Pi_0 + \Pi_1) = \frac{264}{97}$$

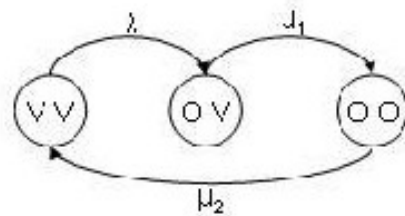
Antes entraban :

$$3(\Pi_0 + \Pi_1) = \frac{84}{37}$$

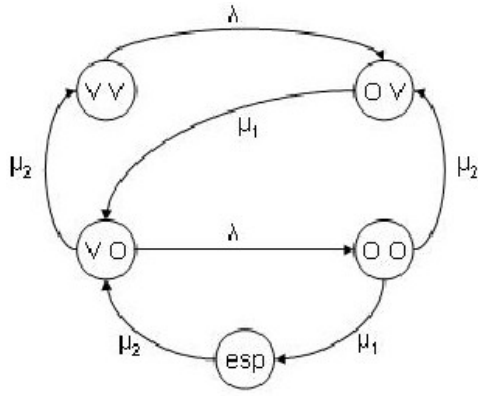
Se pide la diferencia.

Problema 3

1. La cadena (y las tasas de transición) se muestran en la figura



2. Es importante notar que en una cadena de Markov en tiempo continuo los tiempos entre transiciones deben distribuirse exponencialmente. Por esto es que debemos modelar explícitamente el estado en el cual la persona sentada en el primer asiento se encuentra esperando. De acuerdo a esto, la



3. Para esto necesitaremos calcular las probabilidades estacionarias. Las ecuaciones (conservación de flujo) son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 \Pi_{VV}\lambda &= \Pi_{VO}\mu_2 \\
 \Pi_{OV}\mu_1 &= \Pi_{VV}\lambda + \Pi_{OO}\mu_2 \\
 \Pi_{VO}(\lambda + \mu_2) &= \Pi_{VO}\mu_1 + \Pi_{ESP}\mu_2 \\
 \Pi_{OO}(\mu_1 + \mu_2) &= \Pi_{VO}\lambda \\
 \Pi_{ESP}\mu_2 &= \Pi_{OO}\mu_1 \\
 \sum_i \Pi_i &= 1
 \end{aligned}$$

Suponiendo los valores de Π como conocidos y utilizando el mismo tipo de argumento de la pregunta 2 tendremos que:

$$\text{Fracción} = \Pi_{VV} + \Pi_{VO}$$

4. Utilizando la parte anterior, la tasa efectiva de entrada será:

$$\lambda \cdot [\Pi_{VV} + \Pi_{VO}]$$

5. Interpretando las probabilidades estacionarias la probabilidad de encontrar al sistema (en el largo plazo) en un estado en particular tendremos que:

$$E[\text{Personas en el sistema}] = \Pi_{VO} + \Pi_{OV} + 2 \cdot \Pi_{OO} + 2 \cdot \Pi_{ESP}$$

6. Si llega y los dos puestos están vacíos estará en el local en promedio $\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}$. Si llega y el segundo puesto está ocupado, estará en promedio:

$$\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{1}{\mu_2}$$

Esto puesto que siempre deberá estar el tiempo de atención en la primera silla y en la segunda silla y con una probabilidad $\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}$ deberá esperar la atención del tipo en la segunda silla.

Ocupando probabilidades totales:

$$E[T] = \frac{\Pi_{VV}}{\Pi_{VV} + \Pi_{VO}} \cdot \left[\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right] + \frac{\Pi_{VO}}{\Pi_{VV} + \Pi_{VO}} \cdot \left[\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{1}{\mu_2} \right]$$