

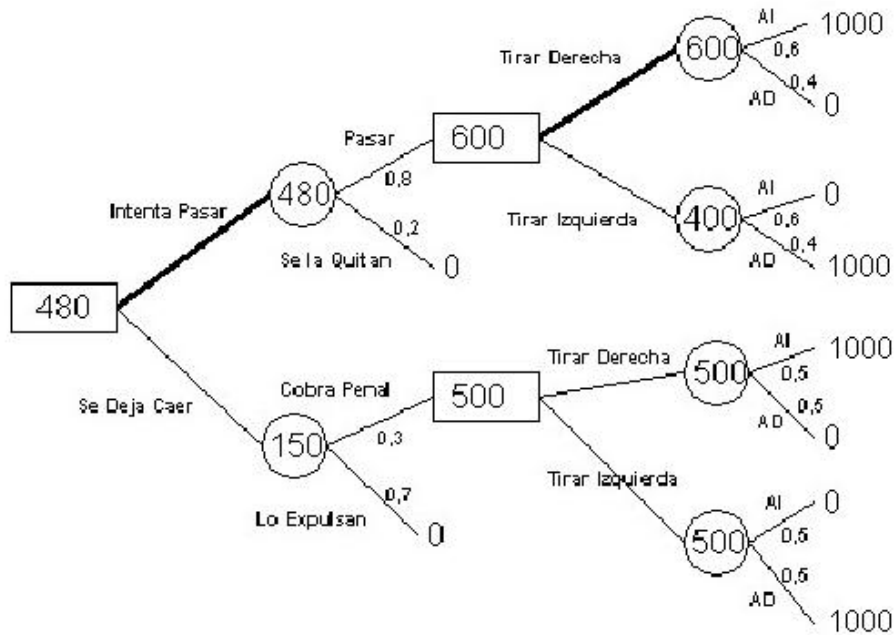


Solución Clase Auxilliary 5, 9 de Agosto de 2006

## Árboles de Decisión y Programación Dinámica Determinística

### Problema 1

1. El problema se puede modelar con el árbol de la figura (los pagos están expresados en M US\$).  
Luego, Reis debe intentar eludir a el colombiano y rematar hacia la derecha.



2. Para esto debemos comparar el retorno de jugar sin los consejos de el Gurú con los que se podrían obtener gracias a la ayuda de sus predicciones, debemos calcular las probabilidades condicionales.

Sean:

- TI = el Gurú dice que el arquero se tira a la izquierda.
- TD = el Gurú dice que el arquero se tira a la derecha.
- AD = el arquero se tira a la derecha.
- AI = el arquero se tira a la izquierda.

Es necesario notar que al ser distinta la probabilidad de que el arquero se tire a la izquierda dependiendo si es un penal o un mano a mano, la probabilidad de que el Gurú diga que el arquero se lanza a la izquierda es distinta para el caso de un penal y el de un mano a mano (0,6 y 0,68 respectivamente), como se puede observar en el árbol de la figura, esto a su vez produce distintas

probabilidades condicionales ( $P[AI/TI]$ ) en cada sub-árbol (*se deja caer o intenta pasar*) .

De esta forma se tiene que, para el caso de un *mano a mano*:

$$\begin{aligned}
 P[TD|AD] &= 0,8 = 1 - P[TI|AD] \\
 P[TI|AI] &= 1 = 1 - P[TD|AI] \\
 P[TI] &= P[TI|AD] \cdot P[AD] + P[TI|AI] \cdot P[AI] \\
 &= 0,2 \cdot 0,4 + 1 \cdot 0,6 \\
 &= 0,68 \\
 \Rightarrow P[TD] &= 0,32
 \end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned}
 P[AD|TD] &= \frac{P[TD|AD]P[AD]}{P[TD]} = \frac{0,8 \cdot 0,4}{0,32} = 1 = 1 - P[AI|TD] \\
 P[AI|TI] &= \frac{P[TI|AI]P[AI]}{P[TI]} = \frac{1 \cdot 0,6}{0,68} = 0,88 = 1 - P[AD|TI]
 \end{aligned}$$

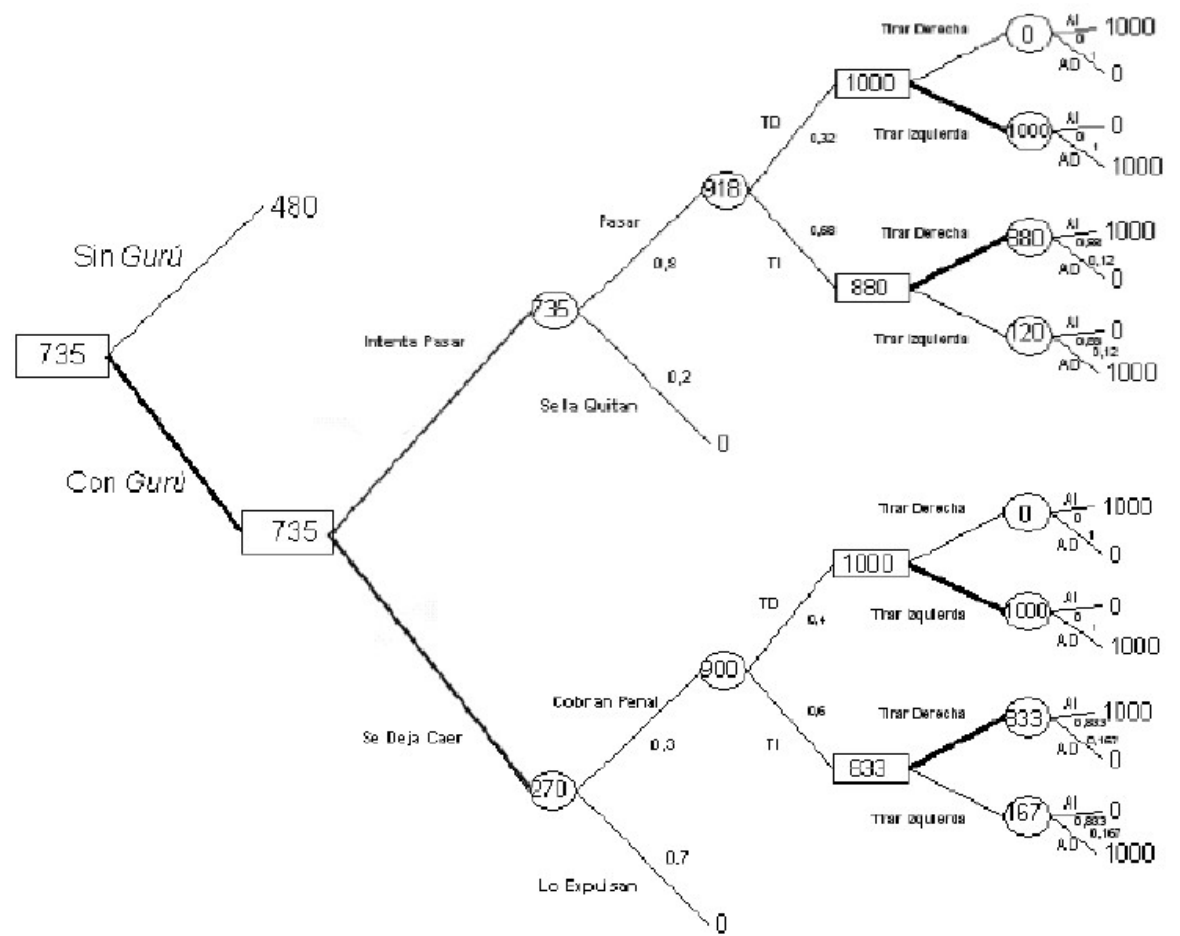
y para el caso de un lanzamiento penal:

$$\begin{aligned}
 P[TD|AD] &= 0,8 = 1 - P[TI|AD] \\
 P[TI|AI] &= 1 = 1 - P[TD|AI] \\
 P[TI] &= P[TI|AD] \cdot P[AD] + P[TI|AI] \cdot P[AI] \\
 &= 0,2 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,5 \\
 &= 0,6 \\
 \Rightarrow P[TD] &= 0,4
 \end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned}
 P[AD|TD] &= \frac{P[TD|AD]P[AD]}{P[TD]} = \frac{0,8 \cdot 0,5}{0,4} = 1 = 1 - P[AI|TD] \\
 P[AI|TI] &= \frac{P[TI|AI]P[AI]}{P[TI]} = \frac{1 \cdot 0,5}{0,6} = 0,833 = 1 - P[AD|TI]
 \end{aligned}$$

Como se observa en el árbol de la Figura, al equipo le conviene contratar a *el Gurú* y este puede cobrar hasta  $\text{US\$}735.000 - \text{US\$} 480.000 = \text{US\$}255.000$  por utilizar sus habilidades predictivas en beneficio del equipo de **Reis**.



## PREGUNTA 2

Un prestigioso taller mecánico, especialista en mantención y reparación de motores, tiene una máquina especializada para estos fines y desea saber cuando cambiar dicha máquina.

Para ello cuenta con los siguientes datos:

- Una máquina nueva cuesta  $C$  [u.m].
- El taller puede mantener una máquina por 1, 2 o 3 años.
- Una máquina con  $i$  años de uso puede ser vendida en el mercado en  $v_i$  [u.m].
- El costo anual de mantención de una máquina con  $i$  años de uso es  $k_i$  [u.m].

El taller busca una política óptima de reemplazo que minimice los costos totales durante los 5 años, restringidos a que siempre debe haber una máquina. Asuma que se compró una máquina el año 1 y que se venderá, sí o sí, al final del año 5.

## SOLUCION

- **Etapas:** Corresponden a los años del horizonte  $(t_0, t_1, t_2, \dots, t_5)$ .
- **Decisiones:** En cada etapa debemos decidir si conservar o cambiar la máquina.
- **Estados:** Edad de la máquina al final de la etapa  $(l_{t_0}, l_{t_1}, l_{t_2}, \dots, l_{t_5})$ .

Notamos que:

- a) En  $t_0$  estamos obligados a comprar y en  $t_5$  obligados a vender.
- b) El espacio de edades posibles varía dependiendo de la etapa:

$$l_0 \in \{0\}, l_1 \in \{1\}, l_2 \in \{1, 2\}, l_3, l_4, l_5 \in \{1, 2, 3\}$$

Definimos:

$V_{t_i}(l_i)$  = Costo de la política óptima desde  $t_i$  hasta el final, dado que la edad de la máquina en  $t_i$  es  $l_i$ .

Con esto, lo que queremos calcular es  $V_{t_0}(0)$ .

■ **Año 5**

La máquina debe venderse al final del último año, al valor correspondiente a la edad de la máquina.

$$V_{t_5}(l_5) = -v_{l_5}$$

■ **Año 4**

El problema a resolver dependerá de la edad que tenga la máquina. En efecto, si tuviera 3 años no tendríamos más que cambiar.

$$\begin{aligned} V_{t_4}(3) &= -v_3 + C + m_1 + V_{t_5}(1) \\ V_{t_4}(2) &= \begin{cases} -v_2 + C + m_1 + V_{t_5}(1) & \text{(Cambiar)} \\ m_3 + V_{t_5}(3) & \text{(Conservar)} \end{cases} \\ V_{t_4}(1) &= \begin{cases} -v_1 + C + m_1 + V_{t_5}(1) & \text{(Cambiar)} \\ m_2 + V_{t_5}(2) & \text{(Conservar)} \end{cases} \end{aligned}$$

■ **Año 3**

El problema a resolver nuevamente dependerá de la edad que tenga la máquina.

$$\begin{aligned} V_{t_3}(3) &= -v_3 + C + m_1 + V_{t_4}(1) \\ V_{t_3}(2) &= \begin{cases} -v_2 + C + m_1 + V_{t_4}(1) & \text{(Cambiar)} \\ m_3 + V_{t_4}(3) & \text{(Conservar)} \end{cases} \\ V_{t_3}(1) &= \begin{cases} -v_1 + C + m_1 + V_{t_4}(1) & \text{(Cambiar)} \\ m_2 + V_{t_4}(2) & \text{(Conservar)} \end{cases} \end{aligned}$$

■ **Año 2**

El problema a resolver nuevamente dependerá de la edad que tenga la máquina. Sin embargo, en el año 2 (dado que se compra una nueva en  $t_1$ ), sólo podría tener una edad de 1 o 2.

$$\begin{aligned} V_{t_2}(2) &= \begin{cases} -v_2 + C + m_1 + V_{t_3}(1) & \text{(Cambiar)} \\ m_3 + V_{t_3}(3) & \text{(Conservar)} \end{cases} \\ V_{t_2}(1) &= \begin{cases} -v_1 + C + m_1 + V_{t_3}(1) & \text{(Cambiar)} \\ m_2 + V_{t_3}(2) & \text{(Conservar)} \end{cases} \end{aligned}$$

■ **Año 1**

El problema a resolver nuevamente dependerá de la edad que tenga la máquina. Pero, en el año 1 (dado que se compra una nueva en  $t_1$ ), sólo podría tener una edad de 1.

$$V_{t_1}(1) = \begin{cases} -v_1 + C + m_1 + V_{t_2}(1) & \text{(Cambiar)} \\ m_2 + V_{t_2}(2) & \text{(Conservar)} \end{cases}$$

■ **Año 0**

Al inicio del primer período, necesariamente debemos comprar una máquina nueva.

$$V_{t_0}(0) = C + m_1 + V_{t_1}(1)$$

### PREGUNTA 3

El Gerente Comercial de una compañía está estudiando la introducción de nuevos productos para la próxima temporada, por lo que debe decidir qué productos comercializar y cuántas unidades de c/u producir.

La producción de cada uno de estos productos, según lo informado por el Gerente de Operaciones, tiene asociado un costo fijo que depende del tipo de producto, igual a  $C_i$ . Además, la producción de cada unidad de producto  $i$  requiere utilizar un porcentaje de la capacidad disponible en la planta igual a  $K_i$ . Suponga que no existen otros costos de producción.

Por otra parte, dadas las condiciones de mercado, sabe que sus ingresos por unidad vendida serán  $U_i$  y que el mercado a lo mas compraría  $D_i$  unidades del producto  $i$  elaborado por la compañía.

- Plantee el modelo de programación dinámica que apoye las decisiones de producción para el problema general descrito, si se busca maximizar las utilidades de la firma.

### SOLUCION

- Variables de decisión:

$$\begin{aligned} X_n &= \text{unidades de producto } n \text{ a producir} \\ y_n &= \begin{cases} 1 & \text{Si se fabrica producto } n \\ 0 & \sim \end{cases} \end{aligned}$$

- Variables de estado:

$$S_n = \% \text{ de la capacidad total disponible para producir producto } n$$

- Beneficio acumulado:

$$\begin{aligned} B_n[S_n, X_n] &= U_n \cdot X_n - C_n \cdot Y_n + V_{n+1}[S_n - K_n \cdot X_n] \\ \text{con } S_{n+1} &= S_n - K_n \cdot X_n \\ \text{donde } V_n[S_n] &= \max_{0 \leq X_n \leq \min(\frac{S_n}{K_n}, D_n)} [B_n[S_n]] \end{aligned}$$

- Condiciones de borde:

$$\begin{aligned} S_1 &= 100\% \\ V_{N+1} &= 0 \end{aligned}$$

Supongamos ahora que los productos en evaluación son 3 y que se cuenta con la siguiente información relevante:

	P 1	P 2	P 3
Costo fijo	3	2	0
Ingreso por unidad vendida	2	3	1
% de capacidad usada por cada unidad	20	40	20

Como se ve en la primera fila de la tabla anterior, el gerente sabe que 2 de estos productos requieren un costo fijo importante. También conoce el ingreso que recibirá la empresa por cada unidad producida, una vez que la producción está en marcha. Además, como se ve en la tercera fila de la tabla, se sabe el porcentaje de capacidad disponible que ocupa cada unidad de producto al ser fabricada. Por condiciones del mercado se sabe que se pueden vender sólo 3 unidades de producto 1, mientras que es posible vender todas las unidades que se puedan fabricar de los otros productos.

- b. En esta situación resuelva, ocupando el modelo de programación dinámica planteado en la parte anterior, la estrategia de producción óptima.

## SOLUCION

Producto 3:

$S_3/X_3$	0	1	2	3	4	5	$V_3[S_3]$	$X_3^*$
100 %	0	1	2	3	4	5	5	5
80 %	0	1	2	3	4		4	4
60 %	0	1	2	3			3	3
40 %	0	1	2				2	2
20 %	0	1					1	1
0 %	0						0	0

Producto 2:

$S_2/X_2$	0	1	2	$V_2[S_2]$	$X_2^*$
100 %	5	4	5	5	0-2
80 %	4	3	4	4	0-2
60 %	3	2		3	0
40 %	2	1		2	0
20 %	1			1	0
0 %	0			0	0

Producto 1:

$S_1/X_1$	0	1	2	3	$V_1[S_1]$	$X_1^*$
100 %	5	3	4	5	5	0-3

Por lo tanto existen 3 configuraciones óptimas:

$X_1^*$	$X_2^*$	$X_3^*$
0	0	5
3	0	2
0	2	1