

# Teoría del Consumidor

## Una breve introducción

William Baeza

Este documento presenta una breve introducción a la teoría del consumidor. Su finalidad es fijar un lenguaje común para las aplicaciones que se revisarán en clase auxiliar. Preparado para el curso microeconomía para la gestión de operaciones, semestre primavera 2004.

### 1 Introducción

Los bloques básicos para el desarrollo de la teoría del consumidor son: (1) el conjunto consumo,  $\mathcal{X}$ , (2) el conjunto factible, (3) la relación de preferencia y, (4) el supuesto de comportamiento.

Los axiomas de elección del consumidor generalmente utilizados son:

**Complejitud** para todo  $x^1, x^2 \in \mathcal{X}$ , ya sea  $x^1 \succsim x^2$  o bien  $x^2 \succsim x^1$ , es decir, se puede comparar.

**Transitividad** para todo  $x^1, x^2, x^3 \in \mathcal{X}$ , si  $x^1 \succsim x^2$  y  $x^2 \succsim x^3$ , entonces  $x^1 \succsim x^3$ , es decir, las elecciones son consistentes.

De tal forma un consumidor puede rankear cualquier número finito de elementos en el conjunto consumo  $\mathcal{X}$ .

Además de la relación de preferencia se utilizan otras dos:

(a) relación de preferencia estricta:  $x^1 \succ x^2$  sí y sólo si  $x^1 \succsim x^2$  y  $x^2 \not\succsim x^1$ .

(b) relación de indiferencia  $x^1 \sim x^2$  sí y sólo si  $x^1 \succsim x^2$  y  $x^2 \succsim x^1$ .

Ahora, para cualquier  $x^1, x^2$  exactamente una de las tres posibilidades mutuamente excluyentes existe:  $x^1 \succ x^2$ ,  $x^2 \succ x^1$ ,  $x^1 \sim x^2$ .

**Continuidad** para todo  $x \in \mathbb{R}_+^n$  el conjunto *al menos tan bueno como*  $\succsim(x)$ , y el conjunto *no mejor que*  $\precsim(x)$  son cerrados en  $\mathbb{R}_+^n$ . Esto garantiza que las preferencias no se reverseen abruptamente.

**Monótona o no saciedad**

**Convexidad** si  $x^1 \neq x^0$  y  $x^1 \succsim x^0$ , entonces  $tx^1 + (1-t)x^0 \succ x^0$ , para todo  $t \in (0, 1)$ .

La convexidad se puede mirar por el lado que entre dos canastas extremas de consumo se preferirá una combinación más balanceada de ellas. Luego hay un sesgo en favor de consumo balanceado.

*Definición 1 (Tasa marginal de sustitución).*— Es la pendiente de una curva de indiferencia, que indica en cada punto, la tasa a la cual el consumidor está dispuesto a intercambiar un bien por otro, tal que permanece indiferente después del intercambio.  $\diamond$

La convexidad requiere que la tasa marginal de sustitución **no** se incremente cuando nos movemos de canastas como  $\mathbf{x}^1$  hacia canastas como  $\mathbf{x}^2$  (ver Figura). En efecto, cuando se tiene poco  $x_2$  se está poco dispuesto a intercambiarlo por  $x_1$ , que cuando se tiene abundante  $x_2$ . Luego se aplica el principio de tasa marginal de sustitución decreciente.

Insertar Figura

En resumen, los axiomas se pueden clasificar así:

- Para hacer comparaciones consistentes entre alternativas (completitud y transitividad)
- Objetivos matemáticos (continuidad)
- Caracterizar los gustos del consumidor (monótona y convexidad)

*Definición 2 (La función de utilidad).*— es una función real valuada  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que representa la relación de preferencia  $\succsim$  si para todo  $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1 \in \mathbb{R}_+^n$ ,  $u(\mathbf{x}^0) \geq u(\mathbf{x}^1) \Leftrightarrow \mathbf{x}^0 \succsim \mathbf{x}^1$  ◇

Por lo tanto, la función de utilidad representa la relación de preferencia del consumidor si ésta asigna mayores números a canastas preferidas.

*Definición 3 (Utilidad marginal).*— del bien  $i$  es  $\partial u / \partial x_i$  ◇

Sea  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ , tal que podemos escribir  $x_2 = f(x_1)$ , con lo cual  $(x_1, x_2) = (x_1, f(x_1))$ , de tal forma que la curva de indiferencia será

$$u(x_1, f(x_1)) = \text{constante}.$$

La tasa marginal de sustitución,  $TMS$ , será el valor absoluto de la curva de indiferencia

$$TMS = |f'(x_1)| = -f'(x_1),$$

ya que  $f' < 0$ .

Pero de la curva de indiferencia se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} f'(x_1) = 0,$$

Con lo cual

$$TMS = \frac{\partial u / \partial x_1}{\partial u / \partial x_2}.$$

Luego la tasa marginal de sustitución es igual al ratio entre las utilidades marginales.

## 2 El problema del consumidor

Se puede plantear como

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n} u(\mathbf{x}), \quad \text{s.a.} \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}' \leq y.$$

Esto resultará en una solución de la forma

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}(\mathbf{p}, y)$$

conocidas como funciones de demanda Marshallianas.

El problema anterior se puede escribir

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = u(\mathbf{x}) + \lambda[y - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}'],$$

donde las condiciones de primer orden son

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} &= \frac{\partial u}{\partial x_i} - \lambda p_i &= 0, \\ y - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}' &= 0.\end{aligned}$$

De lo anterior se obtiene que la *TMS* entre cualquier par de bienes debe ser igual al ratio del precio de ellos.

*Definición 4 (Función de utilidad indirecta).*— se define como

$$v(\mathbf{p}, y) = \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n} u(\mathbf{x}), \quad \text{s.a.} \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}' \leq y,$$

es la función máximo valor que corresponde al problema de maximización de utilidad del consumidor.

Propiedades:

- (1) Continua en  $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+$
- (2) Homogénea de grado cero en  $(\mathbf{p}, y)$
- (3) Estrictamente creciente en  $y$
- (4) Decreciente en  $\mathbf{p}$
- (5) Cuasicóncava en  $(\mathbf{p}, y)$
- (6) Identidad de Roy

$$x_i(\mathbf{p}^0, y^0) = \frac{-\partial v(\mathbf{p}^0, y^0)/\partial p_i}{\partial v(\mathbf{p}^0, y^0)/\partial y}.$$

◇

*Definición 5 (La función gasto).*— ¿cuál es el mínimo gasto en dinero para alcanzar un nivel de utilidad dado? Será

$$e(\mathbf{p}, u) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}', \quad \text{s.a.} \quad u(\mathbf{x}) \geq u.$$

Sea  $\mathbf{x}^h(\mathbf{p}, u)$  el que resuelve el problema anterior. Esta es otra forma de función de demanda, pero no es directamente observable. En efecto, los cambios en precio producen un cambio en la utilidad del consumidor, por lo cual debemos imaginar que compensamos al consumidor vía ingreso para llevarlo al mismo nivel de utilidad anterior, por lo cual hablamos de funciones de demanda compensada.

A las funciones de demanda hipotéticas anteriores se les llamas funciones de demanda Hicksianas.

Propiedades:

- (1) Cero cuando  $u(\cdot, \cdot)$  toma el menor valor de utilidad
- (2) Continua es su dominio  $\mathbb{R}_+^n \times u$
- (3) Para todo  $\mathbf{p} \gg \mathbf{0}$ , es estrictamente creciente y no acotada en  $u$

- (4) Creciente en  $\mathbf{p}$
- (5) Homogénea de grado 1 en  $\mathbf{p}$
- (6) Cóncava en  $\mathbf{p}$
- (7) Lema de Shepard

$$x_i^h(\mathbf{p}^0, u^0) = \frac{\partial e(\mathbf{p}^0, u^0)}{\partial p_i}$$

◇

La relación entre la función utilidad indirecta y la función gasto y entre las funciones de demanda son autoev-  
dentes, y se resumen a continuación

$$\begin{aligned} e(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, y)) &= y, \\ v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, y)) &= u, \\ x_i^h(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, y)) &= x_i(\mathbf{p}, y), \\ x_i(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) &= x_i^h(\mathbf{p}, u). \end{aligned}$$

*Definición 6 (Precios relativos e ingreso real).*— Un precio relativo mide las unidades de un bien en función de las unidades de otro bien. En efecto al calcular  $p_i/p_j$  obtenemos una medida en unidades del bien  $j$  partido por unidades del bien  $i$ . Por su parte al calcular  $y/p_j$  obtenemos el máximo número de unidades del bien  $j$  que se pueden comprar con el ingreso.

Lo que queremos es eliminar el dinero de nuestro análisis. Sabemos que  $\mathbf{x}(\mathbf{p}, y) = \mathbf{x}(t\mathbf{p}, ty)$ , con ello podemos designar a uno de los bienes como numerario, en lugar del dinero

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}, y) = \mathbf{x}(t\mathbf{p}, ty) = \mathbf{x}\left(\frac{p_1}{p_n}, \dots, \frac{p_{n-1}}{p_n}, 1, \frac{y}{p_n}\right).$$

En otras palabras, la demanda de cada uno de los  $n$  bienes depende sólo de  $n - 1$  precios relativos y el ingreso real del consumidor.

◇

### 3 Efecto ingreso y efecto sustitución

¿Cómo cambian las cantidades demandadas cuando el precio cambia? Si cae el precio de un bien su demanda puede aumentar, mantenerse igual o disminuir, es decir, todos estos casos son consistentes con el modelo que hemos examinado (ver Figura).

Insertar Figura

Entre las razones para que la cantidad cambie, podemos mencionar dos. Primero los bienes son relativamente más baratos comparados con otros bienes, por lo cual hay sustitución. Segundo, cuando el precio del bien cae, se incrementa la posibilidad de comprar de todos los bienes un poco más, es decir, hay un aumento en el poder de compra sobre todos los bienes. Este efecto sobre la cantidad demandada es llamado efecto ingreso.

Para analizar ambos efectos utilizaremos una aproximación intuitiva, conocida como descomposición Hicksiana. En ella el consumidor alcanza algún nivel de utilidad antes que cambien los precios. El efecto sustitución es aquel cambio (hipotético) en el consumo que podría ocurrir si los precios cambiaran a sus nuevos niveles, pero

el máximo de utilidad que alcanza el consumidor se mantiene igual que antes que cambiara el precio. El efecto ingreso es todo aquello que queda después del efecto sustitución, es decir, el efecto ingreso se define como residuo. El efecto total es la suma de ambos efectos (ver Figura).

Insertar Figura

Se puede mostrar rápidamente que los puntos sobre la curva de demanda Hicksiana muestran precisamente el efecto sustitución de un cambio en el precio propio. Por su parte los puntos sobre la demanda Marshalliana muestran el efecto total del cambio en el precio propio. De tal forma la curva de demanda Marshalliana diverge de la Hicksiana precisamente, y en una cantidad igual, al efecto sustitución Hicksiano de cambios en el precio propio.

La ecuación de Slutsky es la relación que resume la descomposición a que hemos hecho mención.

TEOREMA 1 (ECUACIÓN DE SLUTSKY).— sea  $\mathbf{x}(\mathbf{p}, y)$  el sistema de demanda Marshalliano. Sea  $u^*$  el nivel de utilidad que se alcanza al precio  $\mathbf{p}$  e ingreso  $y$ . Entonces

$$\frac{\partial x_i(\mathbf{p}, y)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i^h(\mathbf{p}, u^*)}{\partial p_j} - x_j(\mathbf{p}, y) \frac{\partial x_i(\mathbf{p}, y)}{\partial y}.$$

□

Idea de la demostración .—Sabemos que  $x_i^h(\mathbf{p}, u^*) = x_i(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u^*))$ , con ello

$$\frac{\partial x_i^h}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial e}{\partial p_j}.$$

Como  $u^*$  se alcanza al precio  $\mathbf{p}$  e ingreso  $y$ , entonces  $e(\mathbf{p}, u^*) = e(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, y)) = y$ .

Del lema de Shepard tenemos que

$$\frac{\partial e}{\partial p_j} = x_j^h = x_j,$$

es decir, la máxima utilidad que se alcanza al precio  $\mathbf{p}$  e ingreso  $y$  es igual a la demanda Marshalliana.

Con ello

$$\frac{\partial x_i^h}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i}{\partial y} \cdot x_j$$

■

Ahora bien, se puede mostrar que:

- (1)  $\partial x_i^h / \partial p_i \leq 0$ , que se obtiene al utilizar que  $e(\cdot, \cdot)$  es cóncava en  $\mathbf{p}$ .
- (2)  $\partial x_i^h / \partial p_j = \partial x_j^h / \partial p_i$ , lo que quiere decir que los términos de sustitución son simétricos, que sale de manera directa del lema de Shepard.

Se puede mostrar que el Hessiano de una función cóncava es semidefinida negativa. Este resultado se puede especializar al Hessiano de  $e(\mathbf{p}, u)$ , con  $e$  cóncava en  $\mathbf{p}$ .

Con ello la matriz de sustitución

$$\sigma(\mathbf{p}, u) = \left( \frac{\partial x_i^h}{\partial p_j} \right) = \left( \frac{\partial^2 e}{\partial p_j \partial p_i} \right),$$

que contiene todos los términos Hicksianos, es semidefinida negativa.

Por otra parte, la matriz de Slutsky, que se puede escribir

$$s(\mathbf{p}, u) = \left( \frac{\partial x_i}{\partial p_j} + x_j \frac{\partial x_i}{\partial y} \right),$$

y de los resultados anteriores, se obtiene que  $s(\mathbf{p}, u)$  es simétrica y semidefinida negativa.

#### 4 ¿Cómo podemos testear la teoría?

- (1) Homogeneidad de grado cero de las funciones de demanda del consumidor,  $x_i(\mathbf{p}, y)$ , en todos los precios y en el ingreso.
- (2) Satisface la restricción presupuestaria, dado que  $u$  es estrictamente creciente la demanda por bienes debe extinguir el ingreso del consumidor.
- (3) La matriz de Slutsky con elementos

$$s_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j} + x_j \frac{\partial x_i}{\partial y}$$

es simétrica y semidefinida negativa.

Lo anterior impone restricciones sobre los valores que pueden tomar los parámetros en cualquier estimación empírica de sistemas de demanda Marshalliana.

En lo que sigue veremos algunas restricciones de elasticidad que nos ayudarán a realizar ejercicios de estática comparativa.

Dado que la restricción presupuestaria

$$y = \sum_i p_i x_i(\mathbf{p}, y)$$

se cumple para todo  $\mathbf{p}$  e  $y$ , todas las respuestas de los consumidores a cambios de precios o ingreso deben sumar, o agregar, de forma de preservar la igualdad de la restricción presupuestaria.

Sea  $x_i(\mathbf{p}, y)$  la demanda Marshalliana del consumidor por el bien  $i$ . Entonces sean

$$\begin{aligned} \eta_i &= \frac{\partial x_i}{\partial y} \frac{y}{x_i} && \text{elasticidad ingreso} \\ \epsilon_{ij} &= \frac{\partial x_i}{\partial p_j} \frac{p_j}{x_i} && \text{elasticidad precio} \\ s_i &= \frac{p_i x_i}{y} && \text{porción del ingreso utilizada en } i \end{aligned}$$

donde claramente se tiene que  $s_i \geq 0$  y  $\sum_i s_i = 1$ .

De tal forma, para testear la teoría del consumidor, además de las tres condiciones anteriores se tiene la siguiente.

- (4) Agregación de Engel ( $\sum_i s_i \eta_i = 1$ ) y la agregación de Cournot ( $\sum_i s_i \epsilon_{ij} = -s_j$ ). Ellas nos indican como las cantidades demandadas deben ser manipuladas juntas a lo largo del sistema de funciones de demanda.