

**UNIVERSIDAD DE CHILE**  
**IN41B**

**AUXILIAR N° 3**  
**CONSUMO**

**PROFESORA: ANDREA REPETTO**  
**AUXILIARES: GRACIELA PÉREZ**  
**CARLOS RAMÍREZ**  
**SEMESTRE: PRIMAVERA 2006**

**UNIVERSIDAD DE CHILE**  
**IN41B**

▣ **REPASO:**

- **ENFOQUES**
- **MODELO DE DOS PERIODOS**
- **ELASTICIDAD INTERTEMPORAL DE SUSTITUCIÓN.**

▣ **EJERCICIOS**

▣ **ENFOQUES**

➤ **FUNCIÓN KEYNESIANA:**

$$C_t = \bar{C} + c(Y_t - T_t)$$

➤ **MODELO DE 2 PERIODOS:**

- **MODELO BÁSICO**
- **CAMBIOS EN LA TASA DE INTERÉS**
- **RESTRICCIONES DE LIQUIDEZ**

UNIVERSIDAD DE CHILE  
IN41B

- Característica central: "Suavización del consumo"
- El nivel de consumo estará dado por la restricción presupuestaria. La tasa cambio de la senda de consumo será determinada por el ecuación de Euler (E.E.)
- Permite entender el comportamiento de  $C$  en el CP.
- Posibilidad de analizar la reacción del consumo a variaciones en el ingreso (transitorias o permanentes)

▣ **MODELO DE 2 PERIODOS:**

**SUPUESTOS:**

- El individuo vive dos periodos
- Ingresos conocidos en ambos periodos
- Los individuos maximizan su utilidad  $U(c_1, c_2)$ .  $U' > 0$ ,  $U'' < 0$ .
- El consumo es forward looking, ie. Se planifica a futuro. Se respetan las decisiones (no existe inconsistencia intertemporal).

**PROBLEMA DEL CONSUMIDOR:**

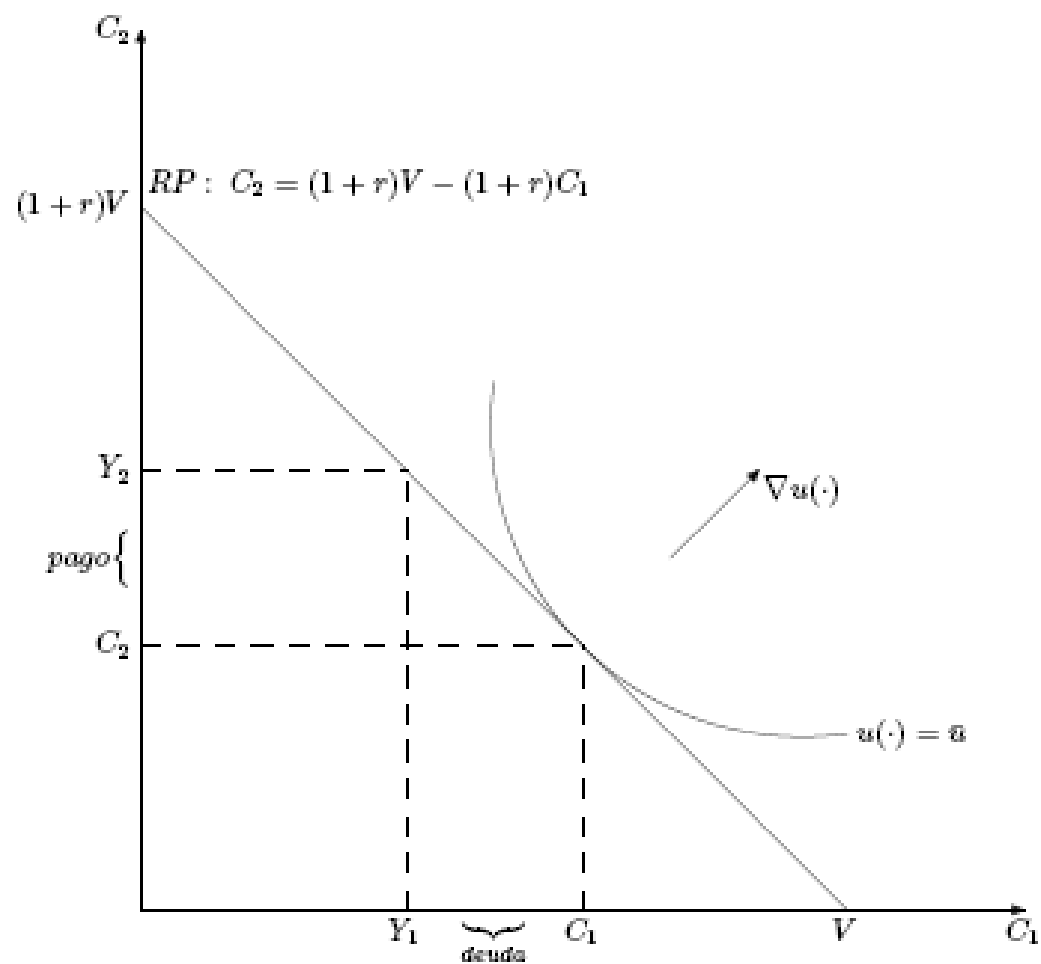
Problema de decisión de consumo (óptimo):

$$\begin{aligned} \max_{C_1, C_2} \quad & u(C_1, C_2) \\ \text{s.a.} \quad & \text{RP} \end{aligned}$$

Restricción presupuestaria:

$$\begin{aligned} t = 1 \quad & Y_1 = C_1 + S \\ t = 2 \quad & Y_2 + (1 + r)S = C_2 \\ \Rightarrow Y_1 + \frac{Y_2}{1 + r} &= C_1 + \frac{C_2}{1 + r} \end{aligned}$$

GRÁFICAMENTE:



- El  $C$  óptimo es tal que la tasa Marginal de sustitución (TMS) entre periodos es igual a la tasa marginal de transformación.
- Del gráfico se observa que el consumo depende del VP de los ingresos en lugar del ingreso corriente, hecho no capturado por la función Keynesiana.
- La tasa de interés representa el precio relativo del consumo presente ( $c_1$ ) en términos del consumo futuro ( $c_2$ ). Estrictamente dicho precio relativo es  $(1 + r)$ .



CASO FUNCIÓN CRRA (AVERSIÓN RELATIVA AL RIESGO  
CTE.)

SUPUESTOS ADICIONALES:

- Agente descuenta futuro a tasa  $\rho$
- Utilidad separable en el tiempo, ie.:

$$U(c1, c2) = U(c1) + \theta_0 U(c2)$$

El agente ahora decide su consumo (óptimo) resolviendo el siguiente problema:

$$\max_{(C_1, C_2)} u(C_1) + \frac{u(C_2)}{1 + \rho} \quad (1)$$

s.a.  $RP$

donde,

$$u(C) = \begin{cases} \frac{C^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} & \text{si } \sigma \geq 0 \text{ y } \sigma \neq 1 \\ \log(C) & \text{si } \sigma = 1 \end{cases}$$

y  $\frac{1}{\sigma}$  es la EIS.

---

El problema del agente se resuelve con técnicas de optimización restringida (lagrangeano).

El supuesto de utilidad marginal positiva ( $u' > 0$  o utilidad creciente) permite trabajar con la RP en igualdad.

El lagrangeano del problema es:

$$L = \frac{C_1^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + \frac{1}{1+\rho} \frac{C_2^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + \lambda \left( Y_1 + \frac{Y_2}{1+r} - C_1 - \frac{C_2}{1+r} \right)$$

$$= \frac{C_1^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + \frac{1}{1+\rho} \frac{C_2^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + \lambda \left( Y_1 + \frac{Y_2}{1+r} - C_1 - \frac{C_2}{1+r} \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial C_1} = C_1^{-\sigma} - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{C_1^\sigma}$$

$$\frac{\partial L}{\partial C_2} = \frac{1}{1+\rho} C_2^{-\sigma} - \frac{\lambda}{1+r} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1+r}{1+\rho} \frac{1}{C_2^\sigma}$$

$$\Rightarrow \left( \frac{C_1}{C_2} \right)^\sigma = \frac{1+\rho}{1+r} \quad (2)$$

La EIS se define como el cambio porcentual en la razón  $C_2/C_1$  cuando cambia el  $p$  relativo del  $C_1$  en términos del  $C_2$  ( $1 + r$ ) cambia en 1 %. Esto es,

$$\text{EIS} = \frac{\partial \log(C_2/C_1)}{\partial \log(1 + r)} \quad (3)$$

tomando logaritmos en la condición de optimalidad (2):

$$\begin{aligned} \sigma \log(C_1/C_2) &= \log(1 + \rho) - \log(1 + r) \\ \Rightarrow -\frac{\partial \log(C_1/C_2)}{\partial \log(1 + r)} &= \frac{1}{\sigma} = \text{EIS} \end{aligned}$$

Para obtener las expresiones para  $C_1$ , y  $C_2$  reemplazamos la condición de optimalidad (2) en la RP (2 ecuaciones y 2 incógnitas)

$$\begin{aligned} Y_1 + \frac{Y_2}{1+r} &= C_1 + \frac{C_2}{1+r} \quad \text{donde : } C_2 = C_1 \left( \frac{1+r}{1+\rho} \right)^{\frac{1}{\sigma}} \\ &= C_1 \left[ \frac{(1+\rho)^{\frac{1}{\sigma}} + (1+r)^{\frac{1}{\sigma}-1}}{(1+\rho)^{\frac{1}{\sigma}}} \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C_1 = \left( Y_1 + \frac{Y_2}{1+r} \right) (1+\rho)^{\frac{1}{\sigma}} \left[ (1+\rho)^{\frac{1}{\sigma}} + (1+r)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \right]^{-1}$$

▣ EJERCICIOS

P1) **Dos Periodos:**

Considere un individuo que vive por dos períodos y maximiza la siguiente función de utilidad de consumo:

$$\log(C_1) + \frac{1}{1+\rho} \log(C_2)$$

donde  $C_i$  es el consumo el período  $i$  ( $i = 1, 2$ ).  $\rho$  es su tasa subjetiva (personal) de descuento. El individuo recibe flujos de ingreso  $Y_1$  e  $Y_2$  en los períodos 1 y 2, respectivamente.

Denote la tasas de interés de mercado por  $r$  y suponga, para simplificar, que esta tasa es igual a la tasa subjetiva de descuento en todo momento.

- a) Escriba la restricción presupuestaria intertemporal del individuo y encuentre las expresiones para el consumo y el ahorro individual,  $S$ , en ambos períodos, como función de los flujos de ingreso y la tasa de interés. ¿Qué pasa con el ahorro cuando  $Y_1 = Y_2$ ? ¿Por qué?

UNIVERSIDAD DE CHILE  
IN41B

El problema es el siguiente:

$$\text{Max } U(c_1, c_2) = \log(c_1) + \frac{1}{1+\rho} \log(c_2)$$

s.a.

$$Y_1 + \frac{Y_2}{1+r} = c_1 + \frac{c_2}{1+r}$$

Nota: La Restricción presupuestaria viene de:

Período 1:  $C_1 + S = Y_1$

Período 2:  $C_2 = S(1+r) + Y_2$

Dividiendo la expresión del período 2 por  $(1+r)$  y sumándolas se obtiene la Restricción presupuestaria intertemporal.

Se construye el lagrangeano

$$L = \log(c_1) + \frac{1}{1+\rho} \log(c_2) + \lambda \left( Y_1 + \frac{Y_2}{1+r} - c_1 - \frac{c_2}{1+r} \right)$$



**UNIVERSIDAD DE CHILE**  
**IN41B**

A partir del lagrangeano derivamos las C.P.O. para  $c_1$  y  $c_2$ :

$$\begin{aligned} c_1: \quad \frac{1}{c_1} - \lambda &= 0 \quad \longrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{c_1} \\ c_2: \quad \frac{1}{1+\rho} * \frac{1}{c_2} - \frac{\lambda}{1+r} &= 0 \quad \longrightarrow \quad \lambda = \frac{1+r}{1+\rho} * \frac{1}{c_2} \end{aligned}$$

Como  $r = \rho$ , e igualando los  $\lambda$  se obtiene  $c_1 = c_2$

Reemplazando en la R.P. se tiene que:

$$c_1 = c_2 = \frac{(1+r)Y_1 + Y_2}{r+2}$$

Para el ahorro se tiene:

$$S_1 = Y_1 - c_1 = \frac{Y_1 - Y_2}{r+2}$$

$$S_2 = 0$$

Si  $Y_1 = Y_2 = Y$  se tiene:

$$c_1 = c_2 = Y$$

$$S_1 = S_2 = 0$$

Como el individuo vive 2 períodos y en ambos períodos recibe el mismo ingreso, lo óptimo es que se consuma todo el ingreso del período y no ahorre nada.

Estudiemos ahora el impacto de cambios en la tasa de interés sobre el ahorro, analizando los casos extremos.

- i. ¿Cuál es el signo del impacto de un aumento en la tasa de interés sobre el ahorro (sube o baja), cuando todo el ingreso se recibe en el primer período, es decir  $Y_2=0$ ? Explique su resultado.

Si  $Y_2 = 0$  y  $Y_1 = 2Y$  se tiene que:

$$c_1 = c_2 = \frac{(1+r)2Y}{r+2}$$

$$S_1 = 2Y - c_1 = \frac{2Y}{r+2}$$

Si  $r$  aumenta entonces el ahorro disminuye, ya que

$$\frac{\partial S_1}{\partial r} = - \frac{2Y}{(r+2)^2} < 0$$

Dado que el individuo recibe todo el ingreso en el primer período, debe ahorrar para suavizar consumo, y consumir lo mismo en el período 1 y 2. Luego, si sube la tasa de interés (que es igual a la tasa de descuento subjetiva), el individuo puede ahorrar menos y obtener en el siguiente período los ingresos suficientes para consumir lo deseado.

UNIVERSIDAD DE CHILE  
IN41B

- ii. Cuál es el signo del impacto de un aumento en la tasa de interés sobre el ahorro (sube o baja), cuando todo el ingreso se recibe en el segundo período, es decir  $Y_1=0$ ? Explique su resultado.

Si  $Y_1=0$  y  $Y_2=2Y$  se tiene que:

$$c_1 = c_2 = \frac{2Y}{r+2}$$

$$S_1 = 0 - c_1 = -\frac{2Y}{r+2}$$

Si  $r$  aumenta entonces el ahorro aumenta, ya que

$$\frac{\partial S_1}{\partial r} = \frac{2Y}{(r+2)^2} > 0$$

**UNIVERSIDAD DE CHILE**  
**IN41B**

En este caso, el individuo recibe todo el ingreso en el segundo período, por lo que debe endeudarse para suavizar consumo, y consumir lo mismo en el período 1 y 2. Por lo tanto, si sube la tasa de interés, el individuo va a tener que ahorrar más y así poder pagar lo prestado y consumir lo deseado en ambos períodos.

UNIVERSIDAD DE CHILE  
IN41B

P2) **T Periodos:**

Suponga que las preferencias en la economía están representadas por una función cuadrática dada por

$$U = \sum_{t=0}^T \beta^t \left( c_t - \frac{ac_t^2}{2} \right)$$

$$\beta = \frac{1}{1+\rho}$$

Con  $a > 0$ ,  $0 < \beta < 1$  y  $c_t$  es el consumo. Suponga, además, que el consumidor tiene cada período un ingreso  $y_t$  dado. Suponga que el ingreso sigue una trayectoria creciente en el tiempo (la que es completamente conocida para toda la vida por el consumidor).

a. Muestre que, en equilibrio, el consumidor decidirá una trayectoria de consumo constante en el tiempo si la tasa subjetiva de descuento,  $\rho$ , es igual al precio relativo del consumo presente en términos de consumo futuro  $r$ . Suponga que el consumidor puede obtener recursos en la cantidad que desee a la tasa  $r$  dada. Suponga además, que el consumidor respeta su restricción presupuestaria. Suponga finalmente que el individuo no acumula activos.

En este caso el problema del consumidor representativo es:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{t=0}^T \beta^t \left( c_t - \frac{ac_t^2}{2} \right) \\ \text{s.a} \quad & \sum_{t=0}^T \frac{c_t}{(1+r)^t} = \sum_{t=0}^T \frac{Y_t}{(1+r)^t} \end{aligned}$$

Como se trata de un problema de optimización con restricciones en tiempo finito, construimos el Lagrangeano:

$$L = \sum \beta^t \left( c_t - \frac{ac_t^2}{2} \right) - \lambda \left( \sum \frac{[c_t - y_t]}{(1+r)^t} \right)$$

A partir del Lagrangeano derivamos las C.P.O. para  $c_t$ :

$$\begin{aligned} \beta^t (1 - ac_t) - \frac{\lambda}{(1+r)^t} &= 0 \\ \bar{c} = c_t &= \frac{1}{a} - \frac{\lambda}{a\beta^t (1+r)^t} \end{aligned}$$

Si  $\rho=r$  se tiene que

$$\bar{c} = c_t = \frac{1-\lambda}{a}$$

De aquí ya tenemos que  $c_t$  no depende de  $t$ , con lo que podemos concluir que el consumo sigue una trayectoria plana.

b. Suponga ahora que los ingresos se distribuyen según la etapa de vida que enfrenta el individuo. Suponga específicamente que  $T=3$  y que los ingresos se distribuyen de la siguiente manera:

período	Ingreso	Igual a
0	$Y_0$	$Y$
1	$Y_1$	$Y(1+\gamma)$
2	$Y_2$	0

Calcule explícitamente el consumo constante encontrado en la parte anterior y el ahorro para cada período  $st$  asumiendo que  $r=p=0$ . Finalmente calcule el ahorro agregado de la economía  $S$ . Explique.1



Reemplazando los ingresos en el lado izquierdo de la sumatoria tenemos que

$$\sum \frac{Y_t}{(1+r)^t} = Y_0 + Y_1 + Y_2 ,$$

ya que  $r=0$ . Por otro lado

$$\sum \frac{c_t}{(1+r)^t} = 3\bar{c}$$

Finalmente

$$\bar{c} = \frac{Y + Y(1+\gamma)}{3}$$

Calculamos los ahorros como  $s_t = Y_t - c_t$

Luego

$$s_0 = Y - \bar{c} = \frac{2Y - Y(1+\gamma)}{3}$$

$$s_1 = Y(1+\gamma) - \bar{c} = \frac{2Y(1+\gamma) - Y}{3}$$

$$s_2 = -\bar{c} = \frac{-Y - Y(1+\gamma)}{3}$$

El ahorro agregado es  $S = s_0 + s_1 + s_2 = 0$ . Pues la economía refleja exactamente el ciclo de vida de cada individuo.

UNIVERSIDAD DE CHILE  
IN41B

1 En esta economía, entonces, para cada instante existe un individuo viviendo cada período.

c. Suponga ahora que el gobierno decide que los individuos deben ahorrar obligatoriamente  $\tau$  para sus periodos 0 y 1 y cantidad que se les devolverá por completo para el período final de sus vidas 2 (es decir  $2\tau$ ). Calcule nuevamente los consumos y ahorros para cada período y el ahorro agregado. Explique sus resultados. ¿Es eficiente el mecanismo utilizado por el gobierno? Dé alguna razón (de las vistas en clases) por qué puede ser beneficioso introducir un sistema de seguridad social.

Sabemos que si el ahorro obligatorio será devuelto por completo para el último período, esta medida no tiene ningún efecto sobre el patrón de consumo de los individuos. La gente va a compensar exactamente con su ahorro voluntario el ahorro forzoso. Es decir los ahorros ahora (denotados por  $\tilde{s}_1$ ) serán:

$$\tilde{s}_0 + \tau = s_0$$

$$\tilde{s}_1 + \tau = s_1$$

$$\tilde{s}_2 - 2\tau = s_2$$

El ahorro agregado, nuevamente será cero, por las mismas razones de la parte anterior.

Incluso si  $\tau$  es muy grande, superando al ahorro voluntario, el individuo tendrá un ahorro negativo, o sea se endeudará para mantener su consumo parejo. Razones como la miopía de algunos consumidores, efectos deseables sobre el mercado del trabajo a través de forzar la jubilación, o por último los problemas de sub-ahorro que puede surgir por el problema de inconsistencia temporal de los individuos (no ahorrarán sabiendo que cuando viejos los jóvenes no los dejarán botados), sirven para justificar un sistema de seguridad social.

P3) **Impuestos:**

Próximamente habrá elecciones en Klein Land y el gobierno está considerando reducir impuestos para estimular el gasto agregado en este período. En el Ministerio de Economía acaban contratar a un par de destacados alumnos del curso de Economía II de la Universidad de Klein Land para que decidan si los impuestos deben ser reducidos sólo transitoriamente o en forma permanente. Estos economistas no se han puesto de acuerdo acerca de qué política recomendar. Uno de ellos piensa que el efecto en el nivel de actividad económica actual será mayor si los individuos saben que la reducción tributaria será transitoria, ya que en ese caso, concentrarán su consumo. El otro cree que el impuesto debe ser reducido permanentemente.

Ud., al percatarse de esta situación y aprovechando los conceptos discutidos en su curso de macroeconomía I, decide ayudar a estos profesores utilizando un modelo simple de dos períodos caracterizado por un individuo representativo que resuelve el problema:

$$\max U = (C_1 - (C_1)^2 / 2) + \beta (C_2 - (C_2)^2 / 2)$$

s.a

$$C_1 + C_2 / (1+r) = Y(1 - \tau_1) + Y(1 - \tau_2) / (1+r).$$

**UNIVERSIDAD DE CHILE**  
**IN41B**

Con  $C_i$  consumo en el período  $i$ ,  $r$  tasa de interés,  $Y$  ingreso en ambos períodos,  $\tau_i$  tasa de impuesto al ingreso en período  $i$  y con el factor de descuento  $\beta \in (0,1)$ . En esta economía, el gobierno bota al mar lo recaudado (supuesto bastante cercano a lo que en la práctica sucede) y el ingreso está exógenamente determinado.

- a. Resuelva el problema del consumidor (encuentre la ecuación de Euler y obtenga los niveles de consumo de equilibrio) conectando la tasa de interés, el nivel de ingreso en cada período y los niveles de consumo.

Ecuaciones de Euler:

$$\max U = \frac{(C_1 - (C_1)^2)}{2} + \frac{\beta(C_2 - (C_2)^2)}{2}$$

s.a

$$C_1 + \frac{C_2}{(1+r)} = Y(1+t_1) + \frac{Y(1+t_2)}{(1+r)} \quad (1)$$

Escribiendo el lagrangeano:

$$L(C_1, C_2, \lambda) = \frac{(C_1 - (C_1)^2)}{2} + \frac{\beta(C_2 - (C_2)^2)}{2} + \lambda \left[ C_1 + \frac{C_2}{(1+r)} - Y(1+t_1) - \frac{Y(1+t_2)}{(1+r)} \right]$$

CPO:

$$\frac{\partial L}{\partial C_1} = \frac{1}{2}(1 - 2C_1) + \lambda = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial C_2} = \frac{\beta}{2}(1 - 2C_2) + \frac{\lambda}{1+r} = 0 \quad (3)$$

**UNIVERSIDAD DE CHILE**  
**IN41B**

Despejando  $\lambda$  en (2) y (3), nos queda:

$$\lambda = \left( C_1 - \frac{1}{2} \right)$$

$$\lambda = \beta(1+r) \left( C_2 - \frac{1}{2} \right)$$

Ahora igualando, y despejando  $C_2$ :

$$\beta(1+r) \left( C_2 - \frac{1}{2} \right) = \left( C_1 - \frac{1}{2} \right)$$

$$C_2 = \frac{1}{\beta(1+r)} \left( C_1 - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2}$$

finalmente reemplazando en (1), obtenemos el valor de  $C_1$ :

$$C_1 + \frac{1}{\beta(1+r)^2} \left( C_1 - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2(1+r)} = Y(1+t_1) + \frac{Y(1+t_2)}{(1+r)}$$

$$C_1 = \frac{\left[ Y \left( (1-t_1) + \frac{(1-t_2)}{(1+r)} \right) + \frac{1}{2\beta(1+r)^2} - \frac{1}{2(1+r)} \right]}{1 + \frac{1}{\beta(1+r)^2}} \quad (4)$$

UNIVERSIDAD DE CHILE  
IN41B

Por su parte,  $C_2$  es igual a:

$$C_2 = \frac{1}{\beta(1+r)} \left( C_1 - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2}$$

- b. Analice el efecto de una reducción en  $t_1$  (caída transitoria en impuestos) versus una reducción en  $t_1$  y  $t_2$  (reducción permanente) en el nivel de consumo presente  $C_1$ . Explique sus resultados apoyándose en la hipótesis del ciclo de vida e ingreso permanente

de la ecuación (4), que es la correspondiente al ingreso del primer periodo, podemos ver que una reducción transitoria del impuesto ( $t_1$ ), nos lleva a un aumento temporal del ingreso disponible, pero aplicando la teoría de ingreso permanente y ciclo de vida, sabemos que este aumento en el ingreso se traduce en una suavización del consumo. En cambio con una reducción permanente de los impuestos, aumenta más aun el ingreso, y éste si se ve reflejado directamente en un aumento de nuestro  $y_{\text{permanente}}$ , y esto se refleja en un claro aumento en el consumo.

Finalmente, la propuesta de bajar los impuestos permanentemente, es la que realmente aumenta el consumo del período actual.