



Universidad de Chile  
Facultad de Ciencias Físicas y  
Matemáticas  
Departamento de Ingeniería Industrial  
IN34A Optimización  
Semestre Primavera 2006

Profesores: Guillermo Duran  
Sebastian Souyris  
Richard Weber  
Auxiliares: Jaime Gacitua  
Leonardo Lopez  
Ximena Schultz  
Rodrigo Wolf

## Control 2 miércoles 4 de octubre de 2006

### P1)

1. ¿Es el algoritmo SIMPLEX un algoritmo polinomial? ¿Es el problema de programación lineal un problema polinomial? Justifique las respuestas.

No, es un algoritmo exponencial, ya que si bien el algoritmo en general se comporta de manera eficiente si existen casos en que simplex toma un tiempo exponencial para resolver el problema.

Por su parte el problema de programación lineal si es polinomial ya que existen algoritmos que lo resuelven en tiempo polinomial en el tamaño del problema, por ejemplo el metodo de las elipsoides o el de Nesterov y Nemirovskii (basta que digan que existen)

2. Suponga un problema de programación lineal con  $n$  variables y  $m$  restricciones. Dar una cota superior en función de  $m$  y  $n$  (y explicarla) para el número de vértices que puede tener el poliedro factible del problema.

La cota superior es  $\binom{n}{m}$  ya que este número nos entrega el total de vértices posibles, vale

decir, todos los conjuntos con  $m$  variables (que es el número de variables que debe haber en la base) que podemos hacer dado que tenemos  $n$  variables.

Decimos que es la cota superior, ya que no necesariamente todas las combinaciones que se puedan armar van a ser factibles, o sea no todos los vértices van a estar en la región o zona factible.

3. Explique en palabras el significado del Teorema de Holgura Complementaria.

No es necesario escribir el teorema, lo importante es decir que este teorema relaciona las variables del problema primal con las del dual a través de ecuaciones con las cuales por ejemplo si es que conozco el valor de las variables del primal puedo obtener el valor de las del dual o saber que restricciones son activas en este.

4. Suponga que  $y^*_1$  (valor óptimo de la variable 1 del dual) es  $= 0$ . ¿Significa eso que el recurso 1 del problema primal se puede aumentar o disminuir en cualquier cantidad sin que el óptimo primal cambie? Justifique.

No significa que pueda aumentar o disminuir el recurso 1 en cualquier cantidad sin que el óptimo del primal cambie. Para que el óptimo primal no cambie yo puedo mover el recurso 1 siempre y cuando este movimiento no altere la base

5. Suponga que ha resuelto por SIMPLEX un problema de programación lineal y decide modificar un valor  $b_i$  del vector de lado derecho. ¿Cómo verifica si la base óptima continúa siendo la misma? ¿Qué haría para resolver el nuevo problema si concluye que el óptimo cambia? Justifique.

Hay que chequear si se cumple que:  $\bar{b} = B^{-1}b \geq 0$ .

A su vez si cambia el óptimo es porque no se cumplió la expresión recién descrita y debo continuar a partir de mi problema dual, ya que en este el cambio antes mencionado no me hizo perder factibilidad.

6. Suponiendo que el problema de programación lineal original es factible, explique bajo qué situación la base óptima del problema de Fase I del SIMPLEX puede no servir como base inicial factible para el problema original. ¿Qué debe hacerse en ese caso?

Cuando la base óptima del problema de fase I incluye alguna de las variables  $t_i$  esta no nos sirve como base inicial factible del problema original, ante tal situación hay dos alternativas (basta que mencionen una de ellas): agregar estas variables al problema original (el algoritmo simplex se encargará de eliminarlas) o se continua iterando en fase I hasta que las variables artificiales que agregamos salgan.

## P2)

Sea el problema:

$$\begin{aligned} \max z &= (10 - 4\theta)x_1 + (4 - \theta)x_2 + (7 + \theta)x_3 \\ \text{s.a. } 3x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 7 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Donde  $\theta$  puede tomar cualquier valor positivo o negativo.

Sean  $x_4$  y  $x_5$  las variables de holgura para las restricciones respectivas. Para  $\theta = 0$ , se sabe que las variables básicas en el óptimo son  $x_1$  y  $x_2$ . Con esta información responda:

1. (1,2 pts) Aplicar el algoritmo SIMPLEX para encontrar el óptimo para  $\theta = 0$ .

Hay que llevar el problema a la forma estándar  $\min = -\{(10 - 4\theta)x_1 + (4 - \theta)x_2 + (7 + \theta)x_3\}$

$$\begin{aligned} \text{s.a. } 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 7 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_5 &= 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

(lo importante es que se den cuenta que tiene que usar menos los coeficientes de la función objetivo con eso basta)

Vamos a partir con  $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ;  $R = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  (se pudo empezar con otra base, pero esta es

la que más conviene).

Luego

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Para ver si estamos en el optimo hay que revisar la condición de optimalidad:

$$\bar{C}r \geq 0 \Leftrightarrow (-7 - \theta \quad 0 \quad 0) - (-10 + 4\theta \quad -4 + \theta) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\bar{C}r \geq 0 \Leftrightarrow (-7 - \theta \quad 0 \quad 0) - (-10 + 4\theta \quad -4 + \theta) \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & 3 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (13 - 2\theta \quad 2 - 2\theta \quad 2 + \theta) \geq 0$$

Hacemos  $\theta=0$  y tenemos

$\Leftrightarrow (13 \quad 2 \quad 2) \geq 0$  por lo tanto el optimo esta formado por la base de  $x_1$  y  $x_2$ , las que toman el valor:

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (\text{todos los otros } x \text{ valen cero})$$

2. (1,2 pts) Determine el intervalo de valores de  $\theta$  para que la solución básica factible anterior siga siendo óptima.

Para que la solución sea optima se debe cumplir que los costos reducidos son mayores o iguales a cero, luego:

$$\Leftrightarrow (13 - 2\theta \quad 2 - 2\theta \quad 2 + \theta) \geq 0 \Rightarrow 13/2 \geq \theta, 1 \geq \theta, \theta \geq -2 \Rightarrow \theta \in [-2 \quad 1]$$

2. (1,2 pts) Determine el mejor valor de  $\theta$  dentro de este intervalo.

El mejor valor es el que haga más grande  $(10 - 4\theta)x_1 + (4 - \theta)x_2 + (7 + \theta)x_3$ , reemplazando los valores de los  $x$ :

$(10 - 4\theta)2 + (4 - \theta)1 = 24 - 9\theta$ , por lo que el valor que mas nos sirve es el más negativo del intervalo encontrado y dicho valor es -2

4. (06 pts) Dado que  $\theta$  se encuentra en el intervalo encontrado en 2, encuentre el intervalo de  $b_1$  y  $b_2$  de forma independiente para que la base factible óptima anterior siga siendo la misma.

Necesitamos mantener siempre:  $B^{-1}b \geq 0$

Luego

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 5 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b_1 - 5 \geq 0 \wedge -2b_1 + 15 \geq 0 \Rightarrow b_1 \in [5 \quad 7.5]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ b2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 7 - b2 \geq 0 \wedge -14 + 3b2 \geq 0 \Rightarrow b2 \in [14/3 \quad 7]$$

5. (0,6 pts) Dado que  $\theta$  se encuentra en el intervalo encontrado en 2, encuentre el intervalo de  $b1$  y  $b2$  de forma dependiente uno del otro para que la base factible óptima anterior siga siendo la misma.

Se debe cumplir lo mismo que arriba luego:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b1 - b2 \geq 0 \wedge -2b1 + 3b2 \geq 0 \Rightarrow b1 \in [b2 \quad (3/2)b2] \wedge b2 \in [(2/3)b1 \quad b1]$$

6. (0,3 pts) Formule el problema dual del problema original.

$$\begin{aligned} &\text{Min } 7y_1 + 5y_2 \\ &\text{s.a. } 3y_1 + 2y_2 \geq (10 - 4\theta) \\ &\quad y_1 + y_2 \geq (4 - \theta) \\ &\quad 2y_1 + 3y_2 \geq (7 + \theta) \\ &\quad y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

7. (0,9 pts) Dado que  $\theta$  se encuentra en el intervalo encontrado en 2, encuentre el óptimo del dual usando el Teorema de Holgura Complementaria.

**Utilizando el teorema de Holgura complementaria se llega al siguiente sistema de ecuaciones (se puede usar  $Ax$  o  $xA^t$ ):**

$$\begin{aligned} &\left[ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 - 4\theta \\ 4 - \theta \\ 7 + \theta \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \\ &\left[ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0 \\ &[3y_1 + 2y_2 - 10 + 4\theta] \cdot (x_1) = 0 \\ &[y_1 + y_2 - 4 + \theta] \cdot (x_2) = 0 \\ &[2y_1 + 3y_2 - 7 - \theta] \cdot (x_3) = 0 \\ &[3x_1 + x_2 + 2x_3 - 7] \cdot (y_1) = 0 \\ &[2x_1 + x_2 + 3x_3 - 5] \cdot (y_2) = 0 \end{aligned}$$

Como  $x_1$  y  $x_2 \neq 0$ , se tiene que  $[3y_1 + 2y_2 - 10 + 4\theta] = 0$  y  $[y_1 + y_2 - 4 + \theta] = 0$

Lo que implica que:

$$y_1 = 2 - 2\theta \text{ y } y_2 = 2 + \theta$$

Con esto el óptimo en el dual toma un valor de:

$$z_{dual} = 24 - 9\theta \text{ (Que es lo mismo que la solución óptima del primal)}$$

**El problema se puede resolver también usando  $X_d Y_h = 0$  y  $X_h Y_d = 0$ , ie:**

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow y_3 = y_4 = 0 \text{ por lo que las dos primeras restricciones son activas}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{Luego: } 3y_1 + 2y_2 = (10 - 4\theta)$$

$$y_1 + y_2 = (4 - \theta)$$

Tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas. El resultado es:

$$y_2 = 2 + \theta$$

$$y_1 = 2 - 2\theta$$

### Problema 3

Una empresa de transporte público tiene que asignar semanalmente el personal a sus puntos de venta de boletos. En total dispone de  $V$  puntos de venta en sus  $E$  estaciones que pueden estar abiertas 16 horas cada día (de las 6 horas hasta las 22 horas). La estación  $e$  tiene  $v_e$  puntos de venta con  $v_e \geq 1$  ( $e = 1, \dots, E$ ).

Se conoce la demanda  $D_{hde}$  de la hora  $h$  del día  $d$  en la estación  $e$  ( $h = 1, \dots, 16$ ;  $d = 1, \dots, 7$ ;  $e = 1, \dots, E$ ), se supone que la demanda ocurre siempre al principio de la hora respectiva y se reparte uniformemente entre los puntos de venta de la estación. El personal se demora 10 segundos en atender un cliente en un punto de venta. La demanda no satisfecha se agrega a la demanda de la hora siguiente

Para brindar un buen servicio la empresa quiere controlar el largo de las colas frente a los puntos de venta de la siguiente forma: Al final de la última hora de cada día, el largo de fila frente a cada punto de venta debe ser igual a 0. Al final de todas las demás horas del día el largo de fila debe ser menor o igual a 3 personas.

Para cada hora  $h$  de un día  $d$  la empresa puede asignar un vendedor a un punto de venta, es decir “abrir” el punto de venta.

Si se cierra un punto de venta en un momento, no se puede abrir la hora siguiente. Se deberá esperar por lo menos 2 horas para reabrirlo (ejemplo: si se cierra un punto de venta a las 14 horas no es posible abrirlo a las 15 horas, sí a las 16 horas). No se puede abrir un punto de venta y cerrarlo una hora después, es decir, si se abre un punto de venta éste tiene que estar abierto por lo menos 2 horas.

Abrir un punto de venta entre lunes y viernes tiene un costo de H unidades monetarias. Este costo asciende a F unidades monetarias durante el fin de semana (sábado y domingo).

El problema consiste en asignar semanalmente personal a los puntos de venta minimizando los costos de esta asignación y respetando las restricciones.

Modele el problema en un programa de programación entera.

### Variables de decisión:

$x_{hdv} = 1$  si en la hora h del día d se abre el punto de venta v; 0 en caso contrario

$y_{hde} =$  número de clientes que pasan de la hora h-1 a la hora h (demanda de la hora h-1 no satisfecha) el día de en la estación e

*(1 por las variables)*

### Función objetivo:

$$\text{Min} \sum_{h=1}^{16} \sum_{d=1}^5 \sum_{v=1}^V H * x_{hdv} + \sum_{h=1}^{16} \sum_{d=6}^7 \sum_{v=1}^V F * x_{hdv}$$

*(0,8 por la función objetivo)*

### Restricciones:

R1: Satisfacción de demanda (calidad de servicio) **Alternativa 1:**

$$D_{16de} + y_{16de} - 360 * \sum_{v \in CVe} x_{hdv} \leq 0 \quad e = 1, \dots, E; d = 1, \dots, 7$$

(al final del día no hay cola en la estación e)

$CVe =$  conjunto de puntos de venta en la estación e

$$D_{Kde} + y_{Kde} - 360 * \sum_{v \in CVe} x_{Kdv} \leq 3 * \sum_{v \in CVe} x_{Kdv} \quad e = 1, \dots, E; d = 1, \dots, 7; K = 1, \dots, 15$$

(al final de la hora K no hay más de 3 personas en cada cola de la estación e)

$$y_{h+1de} \geq D_{hde} - 360 * \sum_{v \in V_e} x_{hdv} + y_{hde} \quad e = 1, \dots, E; d = 1, \dots, 7; h = 1, \dots, 15$$

(conservación de flujo entre horas)

$y_{1de}=0$  inicialización de la variable (condición de borde)

R1: Satisfacción de demanda (calidad de servicio) **Alternativa 2**(es en verdad es lo mismo que la alternativa 1, pero dándose cuenta que lo que sale a un lado de la desigualdad equivale a  $Y_{(h+1)de}$ ) :

$Y_{17de} \leq 0$  o sea al final de la hora 16 no queda nadie sin ser atendido

$$Y_{(h+1)de} \leq 3 * \sum_{v \in CV_e} X_{hdv} \quad e = 1, \dots, E; d = 1, \dots, 7; h = 1, \dots, 15$$

(como la llegada es uniforme y por ende la gente se pone en la fila más corta, basta ver que el número total de personas que quedaron esperando es menor o igual al numero de cajas abiertas por tres)

$$y_{h+1de} \geq D_{hde} - 360 * \sum_{v \in V_e} x_{hdv} + y_{hde} \quad e = 1, \dots, E; d = 1, \dots, 7; h = 1, \dots, 16$$

(la naturaleza de las variables impide considerar que el numero de personas que quedaron de un periodo a otro es negativo)

$y_{1de}=0$  inicialización de la variable (condición de borde)

*(0,7 por cada una de las tres primeras restricciones de R1, 0,3 por la condición de borde)*

R2: Evitar “cambios bruscos”

Si se abre un punto de venta tiene que estar abierto por lo menos 2 horas.

$$x_{hdv} - x_{h-1dv} \leq x_{h+1dv} \quad h = 2, \dots, 15; d = 1, \dots, 7; v = 1, \dots, V$$

Si se cierra un punto de venta tiene que estar cerrado por lo menos 2 horas.

$$x_{hdv} - x_{h-1dv} + 1 \geq x_{h+1dv} \quad h = 2, \dots, 15; d = 1, \dots, 7; v = 1, \dots, V$$

*(0,7 por cada una de las restricciones de R2)*

R3: Naturaleza de las variables

$x_{hdv} \in \{0,1\}$ ;  $y_{hdv}$  pertenece a los enteros positivos

*(0,4 por la naturaleza de las variables)*

**NOTA:** Recuerden que esta es una alternativa de solución, pero perfectamente pueden haber otras maneras de resolver el problema.