

Problema 1

Suponga que usted es el dueño de la fábrica de productos, y sabe que debe satisfacer la demanda que enfrenta para los próximos T meses. Esta demanda la ha estimado en D^t unidades para el mes t .

Actualmente la empresa presenta los siguientes costos de producción:

- Un costo fijo de K para cada mes.
- Un costo unitario de producción de c^t para cada mes.

Cabe señalar que si decide no producir en un mes, no se debe incurrir en el costo fijo.

Además, cuenta con una capacidad máxima de producción de Q_m unidades igual para todos los períodos, y en cualquier período puede decidir cambiar la tecnología de producción que está siendo utilizada, lo cual modificará los costos unitarios de producción a c_a^t , con $c_a^t < c^t$; y la capacidad máxima de la empresa a Q'_m . La implantación de esta nueva tecnología obliga a la empresa a incurrir en un costo de I .

Cabe destacar que una vez que se ha realizado el cambio tecnológico no es posible regresar a la tecnología original, la inversión es realizada una única vez y que el producto no se puede almacenar en bodega.

Adicionalmente, usted posee convenios con la competencia que le permiten comprar unidades de producto terminado a un precio de P , con $P > c^t$ para todo t . Con esta información responda:

1. Formule un modelo de programación lineal entera mixta que permita determinar las acciones que se deben realizar a lo largo del período de planificación con el fin de minimizar los costos en que debe incurrir la empresa para satisfacer la demanda.
2. Cómo cambia su respuesta si ahora se permite realizar inventario de productos, asumiendo que el costo asociado de b^t por unidad almacena desde el período t al $t + 1$, y un inventario máximo de B unidades?

Problema 2

Considere el problema que enfrenta un empresario minero, dueño de un único yacimiento cuprífero. El empresario debe decidir la política de extracción de mineral desde la reserva considerando los próximos T años, de forma de maximizar la ganancia de la operación, considerando que el precio del cobre en el año t será S_t .

El empresario considera que el problema de planificación consiste en determinar la cantidad de mineral a extraer en cada año. La mina puede ser conceptualizada como un conjunto de N bloques de mineral, cada uno con sus propias propiedades geológicas. Así el n -ésimo bloque de mineral consta de TON_n toneladas de mineral, y posee una ley promedio de cobre de P_n %.

A la hora de confeccionar el plan de extracción se debe considerar la precedencia física de los bloques de mineral. Así, para extraer el bloque n -ésimo primero debe ser explotado el $n - 1$. El plan también debe respetar la capacidad de extracción de mineral en cada período. Así la cantidad de mineral extraída en el período t no puede sobrepasar las C_t toneladas.

A la hora de considerar los costos de extracción se asupuesto que estos son lineales en la cantidad extraída, y que además cuentan con una componente fija, es decir si se extrae una cantidad no nula X_t de mineral el costo de extracción es $F_t + V_t \cdot X_t$. Claramente F_t y V_t denotan las componentes fija y variable del costo de extracción en el período t .

Modele el problema de planificación minera mediante técnicas de programación lineal.

Solución

Problema 1

1. Seguimos los pasos típicos:

a) Variables de Decisión:

- α^t : 1 si se decide producir en el mes t , 0 sino.
- x^t : cantidad de unidades producidas con la tecnología antigua en el período t .
- w^t : cantidad de unidades producidas con la tecnología nueva en el período t .
- β^t : 1 si se decide cambiar la tecnología en el período t .
- y^t : cantidad de unidades compradas a la competencia.

b) Restricciones:

1) Cambiar a lo más una vez de tecnología en el horizonte de evaluación

$$\sum_{t=1}^T \beta^t \leq 1$$

2) Satisfacer la demanda

$$x^t + w^t + y^t \geq D^t \quad \forall t = 1, \dots, T$$

3) Producir solamente si se decide hacerlo

$$M\alpha^t \geq x^t + w^t \quad \forall t = 1, \dots, T$$

con

$$M = D^t$$

4) No sobrepasar capacidad con tecnología antigua

$$x^t \leq Q_m(1 - \sum_{\theta \leq t} \beta^\theta) \quad \forall t = 1, \dots, T$$

5) No sobrepasar capacidad con tecnología nueva

$$w^t \leq Q'_m \sum_{\theta \leq t} \beta^\theta \quad \forall t = 1, \dots, T$$

6) Naturaleza de las variables

$$\alpha^t, \beta^t \in \{0, 1\} \quad \forall t = 1, \dots, T$$

$$x^t, y^t, w^t \geq 0 \quad \forall t = 1, \dots, T$$

c) Función Objetivo:

$$\text{mín Costos Totales} = \sum_{t=1}^T K\alpha^t + \sum_{t=1}^T Py^t + \sum_{t=1}^T c^t x^t + \sum_{t=1}^T c_a^t w^t + \sum_{t=1}^T I\beta^t$$

2. En caso de que pueda manejarse inventario entre períodos es necesario agregar una nueva variable:

- I^t : cantidad de inventario guardada desde el período t al período $t + 1$.

Las restricciones de satisfacción de demanda (2) y de naturaleza de variables se modifican quedando:

$$x^t + w^t + y^t + I^{t-1} \geq D^t + I^t \quad \forall t = 1, \dots, T$$

$$\alpha^t, \beta^t \in \{0, 1\} \quad \forall t = 1, \dots, T$$

$$x^t, y^t, w^t, I^t \geq 0 \quad \forall t = 1, \dots, T$$

Además, se debe agregar la restricción sobre la capacidad máxima de bodegaje en cada período:

$$I^t \leq B \quad \forall t = 1, \dots, T$$

Por último, la función objetivo se modifica quedando:

$$\text{mín Costos Totales} = \sum_{t=1}^T K \alpha^t + \sum_{t=1}^T P y^t + \sum_{t=1}^T c^t x^t + \sum_{t=1}^T c_a^t w^t + \sum_{t=1}^T I \beta^t + \sum_{t=1}^T b^t I^t$$

Problema 2

1. Variables:

$$Y_t = \begin{cases} 1 & \text{Sí se extrae mineral en el período } t \\ 0 & \sim \end{cases}$$

X_t = Cantidad de mineral extraído en el período t

$$Z_t^n = \begin{cases} 1 & \text{Sí se extrae bloque } n \text{ en el período } t \\ 0 & \sim \end{cases}$$

2. Restricciones:

a) Secuencia de la extracción:

$$\sum_{u=1}^t Z_u^{n+1} \leq \sum_{u=1}^t Z_u^n \quad \forall t \quad \forall n \in \{1, \dots, n-1\}$$

b) Capacidad de extracción:

$$X_t \leq C_t \cdot Y_t \quad \forall t$$

c) Cantidad extraída:

$$X_t = \sum_{n=1}^N Z_t^n \cdot TON_n \quad \forall t$$

d) Sacar un bloque solo una vez:

$$\sum_{t=0}^T Z_t^n \leq 1 \quad \forall n$$

e) Naturaleza de las variables:

$$X_t \geq 0 \quad \forall t$$

$$Y_T, Z_t^n \in \{0, 1\} \quad \forall t \quad \forall n$$

3. Función objetivo:

$$\text{máx } w = \sum_{t=0}^T \left[S_t \cdot \sum_{n=1}^N Z_t^n \cdot TON_n \cdot \frac{P_n}{100} - F_t \cdot Y_t - X_t \cdot V_t \right]$$