Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN34A: Optimización
Profesor: Guillermo Durán

Clase Adicional
Interpretación gráfica de PL

Problema 1

El gran equipo de "Los Azules"ha elegido nuevo presidente, resultando electo el honorable señor Don Giusseppe Mandinga. Don Giusseppe ha prometido en su campaña brindar espectáculo en todos sus partidos para hacer volver a la gente a los estadios. Para esto Don Giusseppe sabe que puede contratar dos tipos de jugadores: figuras y normales. Un jugador figura hace 1 gol en cada partido jugado, mientras que un jugador normal hace un gol cada 2 partidos jugados y se sabe que con 3 goles o más por partido del equipo en cuestión se considera que éste brindó un buen espectáculo. Por otra parte, para poder hacer jugar a los jugadores de las divisiones inferiores, la Asociación de Futbol tiene estipulado que los equipos no pueden comprar más de 2 jugadores figuras y 5 jugadores normales. Por último, los hinchas consideran que el equipo debe contratar como máximo 2 jugadores normales más que las contrataciones de jugadores figuras, para creer que el equipo brindará un buen espectáculo en sus partidos. Además en el mercado de futbolistas, un jugador figura tiene un costo de 1,5 unidades millonarias y un jugador normal un costo de 1 unidad millonaria. Don Giusseppe necesita cumplir su promesa al menor costo posible, para lo que lo ha llamado a usted para asesorarlo en su decisión. Para esto usted debe hacer lo siguiente:

1. Modele el problema como un problema de programación lineal.
2. Determine gráficamente los vértices del espacio factible e indíquelos en forma explícita.
3. Determine gráficamente el óptimo del problema e indique cuales son las restricciones activas del problema.
4. Cuánto puede variar el precio relativo de los jugadores sin que varíe la solución óptima encontrada anteriormente.
5. Indique para que rangos del número máximo de jugadores normales que se pueden contratar, la solución encontrada deja de ser óptima y para que rango deja de ser factible. Por qué?. Si se pudiesen contratar el número de jugadores figuras que se quisieran, cuántos jugadores figuras se contratarían y cuántos normales. Por qué? Si se pudiesen contratar hasta 3 jugadores figuras, Cuál sería el óptimo?
6. Una investigación reciente determina que un jugador figura en realidad marca 3 goles cada 2 partidos, Cómo cambia su respuesta con esta investigación? Y si además se supiera que un jugador normal marcar 1 gol por partido?

Problema 2

Armijo Catalán, destacado profesor de la Universidad Diego Machuca, está organizando sus horas para compatibilizar sus clases con las horas destinadas a su polola. Para esto Armijo cuenta con 30 horas semanales y sabe que por cada hora destinada a hacer clases debe destinar una hora extra para prepararla.

La Universidad le ha exigido que al menos debe hacer 6 horas de clases a la semana, mientras que su polola se siente ignorada si Armijo no le dedica al menos 10 horas semanales, por lo que de no cumplir con este número de horas se irá a buscar quien le preste más atención.

Por último Armijo se ha enterado que su polola es muy celosa, por lo que si dedica 10 horas más a hacer clases que lo que le dedica a ella, ésta se pondrá celosa y terminará su relación con Armijo.

Ayude a Armijo Catalán a solucionar su problema, sabiendo que una hora dedicada a su polola le proporciona 3 unidades de satisfacción (U.S.) y que cada hora destinada a hacer clases le proporciona 2 U.S., pare esto se pide:

1. Formular un modelo de PL continua que permita a Armijo decidir cuánto tiempo destinar a hacer clases y cuánto a su polola.
2. Dibuje el espacio de soluciones factibles y encuentre gráficamente la solución óptima de este problema.
3. Armijo siente que su interes por las clases crece, determine cuánto es lo máximo que podría crecer la utilidad (valorado en U.S.) que las clases le proporcionan sin que varíe la solución óptima encontrada.
4. Armijo ha descubierto que su polola es más celosa que lo que él creía, determine cuánto es lo máximo que pueden variar los celos de la polola (desde el punto de vista del máximo de horas de diferencia entre lo que dedica a ella y a sus clases) de modo que la solución encontrada siga siendo óptima

Solución

Problema 1

1. Colocamos las siguientes variables de decisión:
   x_1 = Número de jugadores figuras contratados por los azules.
   x_2 = Número de jugadores normales contratados por los azules.
   Con lo cual nos queda el siguiente modelo:

$$\min C = 1,5x_1 + x_2$$

$$\text{s.a.} \quad x_1 + 0,5x_2 \geq 3 \qquad (1)$$

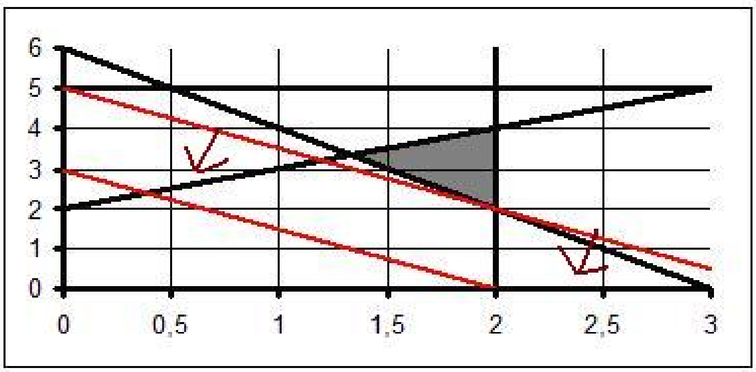
$$-x_1 + x_2 \leq 2 \qquad (2)$$

$$x_1 \leq 2 \qquad (3)$$

$$x_2 \leq 5 \qquad (4)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \qquad (5)$$

2. El gráfico queda:



   Luego los vértices son:

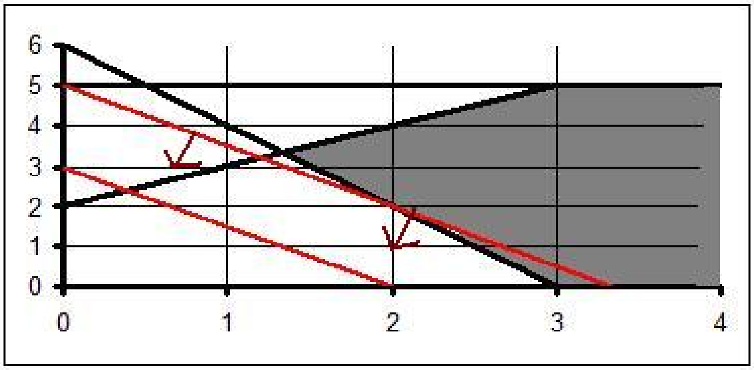
$$A = (2,4) \quad B = (2,2) \quad C = (4/3, 10/3) = (1{,}33, 3{,}33)$$

3. El óptimo es el punto C = (2,2) y las restricciones activas son las restricciones (1) y (3).

4. Supongamos primero que queda fijo el coeficiente de los jugadores normales. Esto implica que el coeficiente de los jugadores figuras se puede mover en el intervalo $(-\infty, 2]$. Dado que no tiene sentido que este valor sea negativo, podemos decir que la respuesta es el intervalo $[0, 2]$.

   Supongamos ahora que queda fijo el coeficiente de los jugadores figuras. Esto implica que el coeficiente de los jugadores figuras se puede mover en el intervalo $(-\infty, 0]$ o en el intervalo $[0{,}75, +\infty)$. Dado que no tiene sentido que este valor sea negativo, podemos decir que la respuesta es el intervalo $[0{,}75, +\infty)$.

5. Si el número máximo de jugadores normales (restricción (4)) cae más allá de 2, entonces la solución deja de ser óptima y además el espacio se hace infactible. Luego si $b_4 < 2$, la solución deja de ser óptima y factible.
   Por otra parte, contratar el número de jugadores figuras que se quieran corresponde a quitar la restricción (3), con lo cual el óptimo queda:

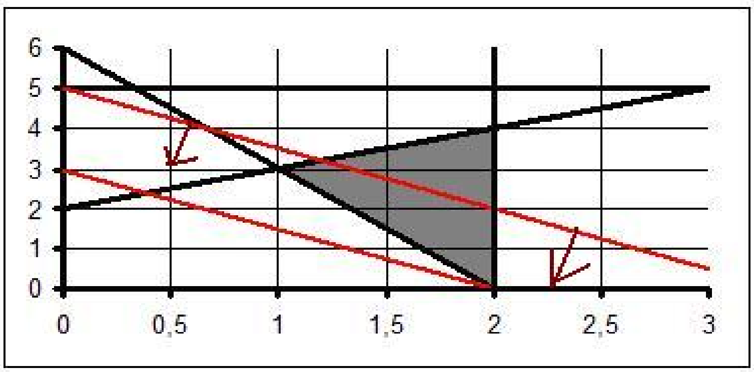


Se puede ver que el óptimo queda en $D = (3, 0)$, luego se contratan 3 jugadores figuras y ninguno normal. Ahora si se coloca la restricción $x_1 \leq 3$, la solución anterior no varía, vale decir el óptimo sigue siendo $D = (3, 0)$.

6. Con el cambio en los goles de las figuras la restricción (1) varía a

$$1,5x_1 + 0,5x_2 \geq 3$$

Quedando el siguiente gráfico:



Así el nuevo óptimo es (2,0). Si además se agrega el cambio en los normales tenemos que la restricción (1) varia a:

$$1,5x_1 + x_2 \geq 3$$

Con lo cual nos queda:

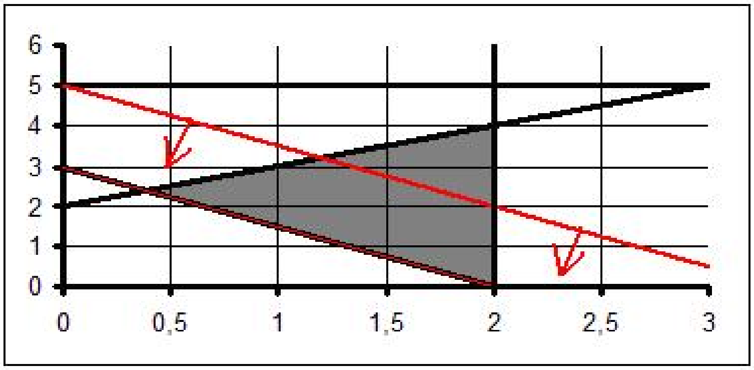
Así la solución óptima varía al segmento de esta última restricción entre los puntos (2/5,12/5) = (0.4, 2.4) y (2,0)

Problema 2

1. `Variables de Decisión`:
X: Número de horas dedicadas a la polola
Y: Número de horas dedicadas a hacer clases

`Función Objetivo`:

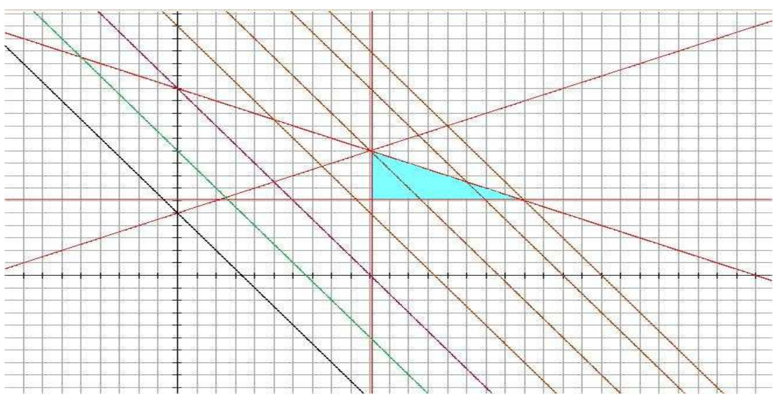
$$\text{máx}\,\{2 \cdot Y + 3 \cdot X\}$$



`Restricciones`:

$$
\begin{aligned}
2 \cdot Y + X &\leq 30 &\quad (6)\\
Y - X &\leq 10 &\quad (7)\\
Y &\geq 6 &\quad (8)\\
X &\geq 10 &\quad (9)\\
X, Y &\geq 0 &\quad (10)
\end{aligned}
$$

2. Graficando el modelo anteriormente planteado se obtiene el siguiente gráfico:



Así vemos que la solución óptima es el punto (18,6)

3. El óptimo cambia cuando la función objetivo se hace paralela a la restricción (6), es decir, cuando la función objetivo es $6 \cdot Y + 3 \cdot X$, con esto el valor de las clases puede aumentar hasta 6 [U.S.]

4. La solución deja de ser óptima cuando la restricción (7) hace infactible el punto óptimo, lo cual ocurre cuando X = 18 e Y = 6 en (7), es decir en 12 - 18 = -6. Con esto el óptimo cambia cuando la polola exige verlo 6 horas más que lo que dedica a clases.