Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN34A – Optimización

Profesores: Guillermo Durán
Richard Weber
Sebastián Souyris
Auxiliares: Jaime Gacitúa
Leonardo López
Ximena Schultz
Rodrigo Wolf

Auxiliar Control 1

28 de agosto de 2006

Problema 1

a) Dé un ejemplo de un problema de programación lineal no acotado. Grafique.
b) Dé un ejemplo de un problema de problema de programación lineal con infinitas soluciones óptimas. Grafique.
c) ¿Puede existir un óptimo de un problema de programación lineal que no sea un vértice del poliedro factible? Si la respuesta es si, de un ejemplo y grafíquelo; si la respuesta es no, explique porque.
d) Armijo Catalán, destacado profesor de la universidad Diego Machuca, está organizando sus horas para compatibilizar sus clases con las horas destinadas a su polola. Para esto Armijo cuenta con 30 horas semanales y sabe que por cada hora destinada a hacer clases debe destinar una hora extra para prepararla.
   La Universidad le ha exigido que al menos debe hacer 6 horas de clases a la semana, mientras que su polola se siente ignorada si Armijo no le dedica al menos 10 horas semanales, por lo que de no cumplir con éste número de horas se irá a buscar quien le preste más atención.
   Por último Armijo se ha enterado que su polola es muy celosa, por lo que si dedica 10 horas más a hacer clases que lo que le dedica a ella, ésta se pondrá celosa y terminará su relación con Armijo.
   Ayude a Armijo Catalán a solucionar su problema, sabiendo que una hora dedicada a su polola le proporciona 3 unidades de satisfacción (U.S.) y que cada hora destinada a hacer clases le proporciona 2 [U.S.], para esto se pide:
   1) Formular un modelo PL continua que permita a Armijo decidir cuánto tiempo destinar a hacer clases y cuánto a su polola.
   2) Dibuje el espacio de soluciones factibles y encuentre gráficamente la solución óptima de este problema
   3) Armijo siente que su interés por las clases crece, determine cuánto es lo máximo que podrá crecer la utilidad (en U.S.) que las clases le proporcionan sin que varíe la solución óptima encontrada.
   4) Armijo ha descubierto que su polola es más celosa que lo que él creía, determine cuánto es lo máximo que pueden variar los celos de la polola (desde el punto de vista del máximo de horas de diferencia entre lo que dedica a ella y a sus clases) de modo que la solución encontrada siga siendo óptima.

Problema 2

Se tiene el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} &máx && y - x \\ &s.a && x^2 - y \geq 0 \\ & && x^2 + y^2 \leq 2 \end{aligned}$$

1. (1 punto) Buscar el (los) óptimo(s) global(es) del problema a través del análisis gráfico y verifique numéricamente que cumple las condiciones de KKT.
2. (2.5 puntos) Encuentre al menos 2 puntos que verifiquen KKT y no sean óptimos globales del problema. ¿Por qué puede darse esta situación? Justifique con detalle todas las afirmaciones que realice.

3. (2.5 puntos) Suponga que la primera restricción es modificada a $x^2 + y \leq 0$. Encuentre todos los puntos que verifiquen KKT. ¿Son óptimos globales del problema? Justifique con detalle todas las afirmaciones que realice.

Problema 3

Nuestro amigo, Don Giusseppe Mandinga ha decidido utilizar su conocimiento de modelación lineal para confeccionarse una pseudo asignación del tiempo que resta del año, el cual es TA.
Dentro de las actividades prioritarias en esta asignación se encuentran: asistir a los I Happy Hours que restan en el año, cada uno de los cuales tiene una duración máxima de TH_i, dedicarle tiempo a la conquista de su amor recién descubierto, y mantener su preocupación por evitar que sus alumnos despierten al lado oscuro. El resto de su tiempo lo dedica a sus actividades cotidianas.

Él tiene la posibilidad de cantar en cada uno de los Happy Hours, y como su afición por el canto es grande, ha decidido que a lo más en dos de los Happy Hours será él el único cantante, y por lo tanto, cantará toda la duración del Happy Hours en cuestión.

Para su conquista amorosa ha llevado a cabo una encuesta entre sus amigos y ha concluido que ninguno de ellos tiene idea alguna de como entender a las mujeres, pero de todas formas ha logrado rescatar la siguiente respuesta reiterativa de ellos: "para conquistarla debes hacer que cada cita dure más que el total de tiempo ya dedicado a las citas anteriores, con excepción de la última cita, la cual debe ser la de menor duración de todas". Dada esta información, Giusseppe ha decidido que debe planificar el tiempo de duración de cada una de las J citas que espera tener con su enamorada.

Además, Giusseppe luchará por evitar que sus M alumnos se vayan al lado oscuro. Para ello, él estima que cada unidad de tiempo dedicada logra que CB alumnos no tomen este camino.
Por último, Giusseppe ha pensado mucho sobre la forma de priorizar entre una y otra actividad, y ha llegado a la conclusión de que todo lo puede transformar en unidad de gozo, [u.g]. Es así como ha definido que el lograr el amor le entregaría BA [u.g] por cada unidad de diferencia entre el tiempo destinado a la última cita y el tiempo de la cita de menor duración de entre todas las restantes. El canto en los Happy Hours le otorga BC_i [u.g] por unidad de tiempo cantada en el Happy Hours i, y obtiene un beneficio de BSLO por cada alumno que logra que no opte por el camino oscuro.

La idea de Giusseppe es construir un modelo de programación lineal continua que le permita maximizar sus unidades de gozo durante lo que resta de año.

Nota: Preocúpese solamente de asignar el tiempo disponible en el año y no de la secuencia que deberían seguir las distintas actividades.

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN34A – Optimización

Profesores: Guillermo Durán
Richard Weber
Sebastián Souyris

Auxiliares: Jaime Gacitúa
Leonardo López.
Ximena Schultz
Rodrigo Wolf

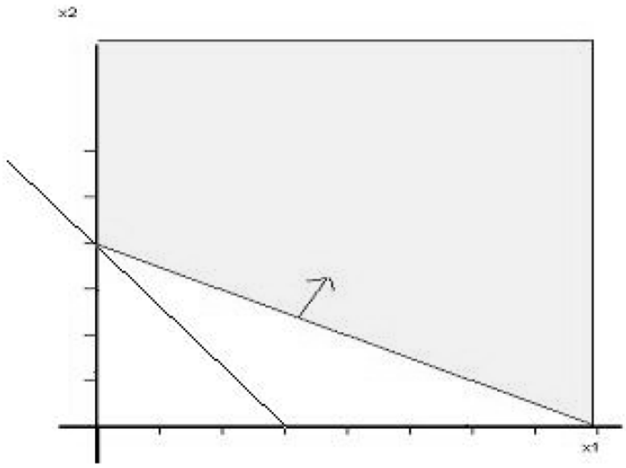
Pauta Auxiliar Control 1

28 de agosto de 2006

Problema 1

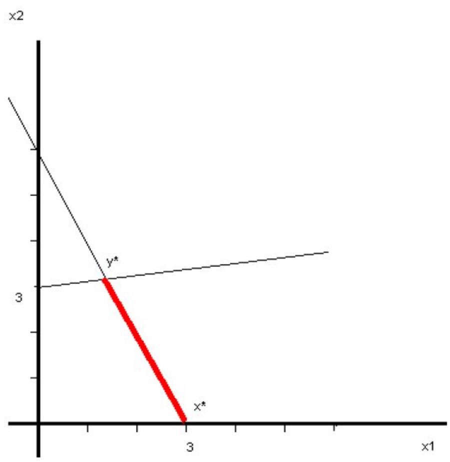
a)

$$\begin{array}{ll} mín & z = x_1 + x_2 \\ s.a & g_1(x_1,x_2) = x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$



b)

$$\begin{array}{ll} máx & z = 2x_1 + x_2 \\ s.a & g_1(x_1,x_2) = 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ & g_2(x_1,x_2) = -x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$



c) Si, esto sucede cuando la pendiente de la función objetivo tiene el mismo valor que la pendiente de una de las restricciones, es decir, cuando éstas son paralelas. Este caso es el solicitado en el punto anterior, ver ejemplo planteado en b.

d)

1)

- Variables de decisión:

  X: Número de horas dedicadas a la polola
  Y: Número de horas dedicadas a hacer clases

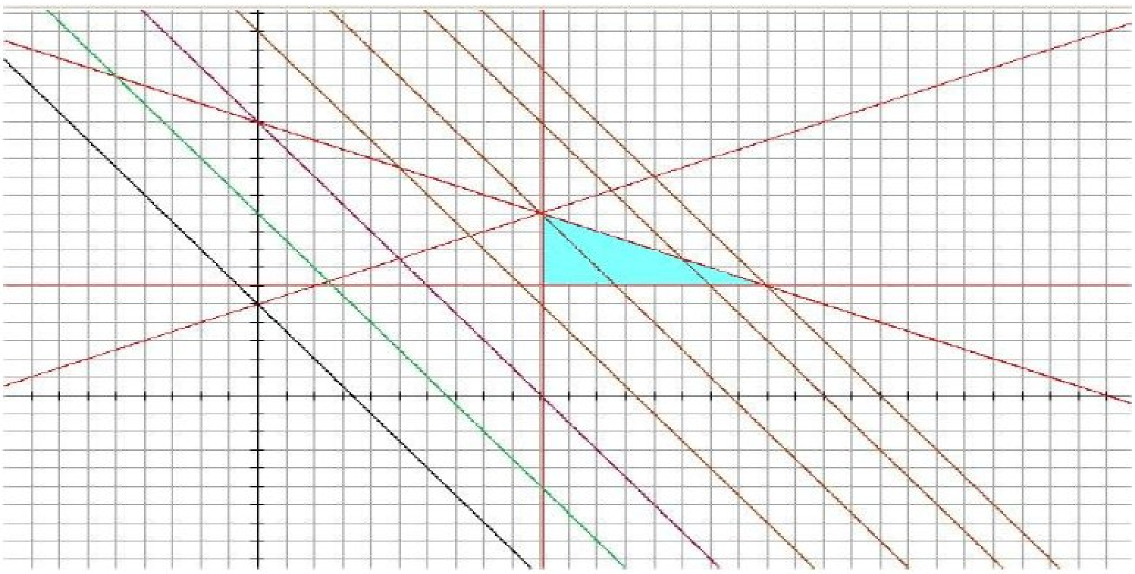
- Función objetivo: $máx \quad z = 2Y + 3X$

- Restricciones:

  1. Capacidad horaria: $2Y + X \leq 30$
  2. Controlar celos de la polola: $2Y - X \leq 10$
  3. Cantidad mínima de clases: $Y \geq 6$
  4. Cantidad mínima de pololeo: $X \geq 10$
  5. Naturaleza de las variables: $X, Y \geq 0$

  Dado que el enunciado no es totalmente claro, la segunda restricción podría haber sido planteada como: $Y - X \leq 10$

2) Graficando el modelo anteriormente planteado se obtiene:



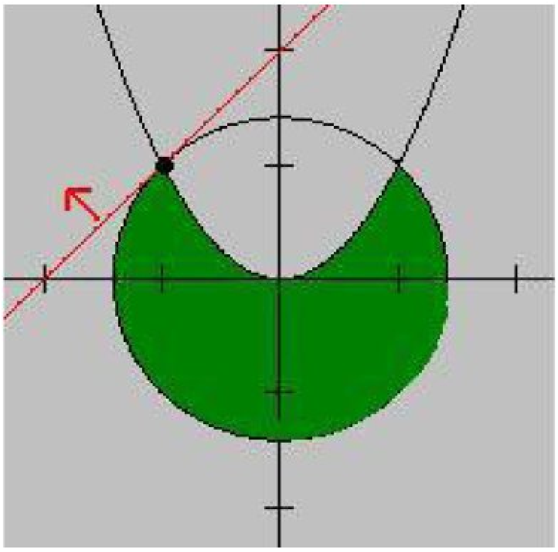
De donde es posible apreciar que la solución óptima es el punto (18,6).

3) El óptimo cambia cuando la función objetivo se hace paralela a la restricción (1), es decir, cuando la función objetivo es 6Y+3X, con esto el valor de las clases puede aumentar hasta 6 [U.S.]
4) La solución deja de ser óptima cuando la restricción (2) hace in factible el punto óptimo, lo cual ocurre cuando X = 18 e Y = 6 en (2), es decir en 12 - 18 = -6. Con esto el óptimo cambia cuando la polola exige verlo 6 horas más que lo que dedica a clases.

Problema 2

1. Veamos el análisis gráfico:

El punto óptimo es el (-1,1).



Verifiquemos las condiciones de KKT:

Llevemos al problema a la forma necesaria para aplicar KKT:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & x - y \\ \text{s.a.} & -x^2 + y \leq 0 \\ & x^2 + y^2 - 2 \leq 0 \end{array}$$

Ambas restricciones son activas en el óptimo, por lo tanto debe satisfacerse que:

$$\nabla f(-1,1) + \mu_1 \nabla g_1(-1,1) + \mu_2 \nabla g_2(-1,1) = 0$$

Así:

$$\nabla f(x,y) = (1,-1) \Rightarrow \nabla f(-1,1) = (1,-1)$$
$$\nabla g_1(x,y) = (-2x,1) \Rightarrow \nabla g_1(-1,1) = (2,1)$$
$$\nabla g_2(x,y) = (2x,2y) \Rightarrow \nabla g_2(-1,1) = (-2,2)$$

Luego tenemos:

$$(1,-1) + \mu_1(2,1) + \mu_2(-2,2) = 0$$

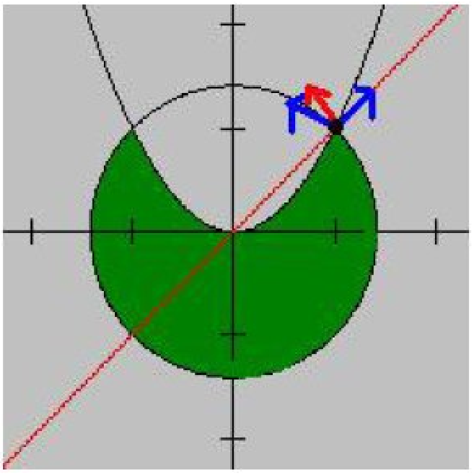
El sistema queda:

$$2\mu_1 - 2\mu_2 = -1$$
$$\mu_1 + 2\mu_2 = 1$$
$$\Rightarrow \mu_1 = 0, \mu_2 = \frac{1}{2}$$

Con esto el punto verifica KKT.

2. Existen solo 2 puntos, además del óptimo, que cumplen KKT, veámoslo gráficamente:

- Punto 1:



Vemos que el punto (1,1) cumple con KKT, verifiquémoslo numéricamente:
En este punto ambas restricciones son activas, luego

$$\nabla f(1,1) = (1,-1)$$

$$\nabla g_1(1,1) = (-2,1)$$

$$\nabla g_2(1,1) = (2,2)$$

Así se tiene que:

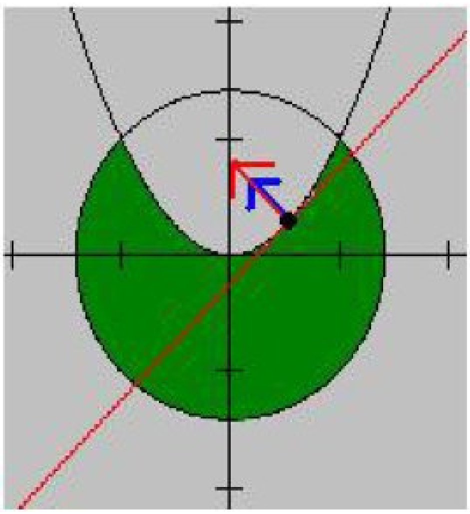
$$-2\mu_1 + 2\mu_2 = -1$$

$$\mu_1 + 2\mu_2 = 1$$

$$\Rightarrow \mu_1 = \frac{2}{3}, \mu_2 = \frac{1}{6}$$

Luego se verifica que el punto cumple KKT.

- Punto 2:



Para calcular el punto que lo cumple se pueden usar 2 formas:
La primera dice que el punto viene dado por donde el gradiente de la función objetivo sea paralelo al de la primera restricción, o sea:

$$(1,-1) = \alpha(-2x,1)$$

$$\Rightarrow \alpha = -1$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Y como además el punto pertenece a la parábola,

$$\tfrac{1}{4} - y = 0 \Rightarrow y = \tfrac{1}{4}$$

La segunda opción es encontrar el punto donde la función objetivo intersecta en un solo punto a la parábola, o sea se busca que:

$$y - x = a$$

$$x^2 - y = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = y$$

Luego

$$x^2 - x - a = 0$$

Así, para que la intersección sea un solo punto a debe ser tal que la expresión anterior sea un cuadrado perfecto, luego a = 1/4 con lo que nos queda:

$$(x - \frac{1}{2})^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Con esto y = $(½)^2$ = ¼, luego el punto que se busca es el (½,¼)
Luego vemos del gráfico que el punto (½,¼) cumple con KKT, verifiquémoslo numéricamente:

En este punto solo la primera restricción es activa, luego

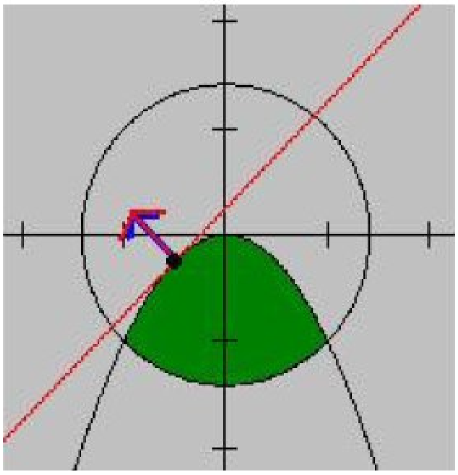
$$\nabla f(\frac{1}{2},\frac{1}{4}) = (1,-1)$$

$$\nabla g_1(\frac{1}{2},\frac{1}{4}) = (-1,1)$$

Así se tiene que con μ_1 = 1 se cumple la condición de KKT.

Esta situación puede darse ya que la región factible no es convexa, lo cual se prueba de la siguiente forma:
Sabemos que los puntos (-1,1) y (1,1) pertenecen a la región factible, luego si fuera convexo cualquier punto de la recta $\lambda(-1,1) + (1-\lambda)(1,1)$ debiera pertenecer a la región factible. Tomemos $\lambda = 1/2$, con esto resulta el punto (0,1) que claramente no pertenece a la región factible ya que $0^2 - 1 = -1 < 0$ => la región factible no es convexa.

3. En este caso tenemos solo un punto que cumple KKT, dado que la región factible y la función objetivo es convexa. El óptimo se muestra en la figura:



Para calcular el óptimo se pueden usar 2 formas:
La primera dice que el óptimo viene dado por donde el gradiente de la función objetivo sea paralelo al de la primera restricción, o sea:

$$(1,-1) = \alpha(2x,1)$$
$$\Rightarrow \alpha = -1$$
$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Y como además el punto pertenece a la parábola,

$$\tfrac{1}{4} + y = 0 \Rightarrow y = -\tfrac{1}{4}$$

Finalmente el punto buscado es el (-½, -¼).
La segunda opción es encontrar el punto donde la función objetivo intersecta en un solo punto a la parábola, o sea se busca que:

$$y - x = a$$
$$x^2 + y = 0$$
$$\Rightarrow x^2 = -y$$

Luego

$$x^2 + x + a = 0$$

Así, para que la intersección sea un solo punto a debe ser tal que la expresión anterior sea un cuadrado perfecto, luego a = 1/4 con lo que nos queda:

$$(x + \frac{1}{2})^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Con esto $y = -(-½)^2 = -¼$, luego el punto que se busca es el (-½,-¼)
Verifiquemos que cumple con KKT:
En este punto solo la primera restricción es activa, luego tenemos:

$$\nabla g_1(x,y) = (2x, 1)$$

Luego

$$\nabla f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}) = (1, -1)$$

$$\nabla g_1(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}) = (-1, 1)$$

Así se tiene que con $\mu_1 = 1$ se cumple la condición de KKT.

Como la región factible y la función objetivo son convexas, el punto encontrado es óptimo global.
Demostremos que la región factible y la función objetivo son convexas:

- Función objetivo:

Calculamos su hessiano,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El cual es definido positivo (y negativo a la vez) por lo que la función objetivo es convexa.
Notar que la función objetivo es lineal. Como sabemos que las funciones lineales son convexas y cóncavas a la vez, nos basta para concluir que la función objetivo es convexa.

- Región factible:

Se puede usar cualquier método para demostrar la convexidad, por ejemplo se pueden tomar 2 puntos cualquiera de la región factible: (x,y) y (x′,y′). Demostremos que cualquier punto de la recta $\lambda(x,y)+(1-\lambda)(x',y')$ con $\lambda \in [0,1]$ pertenece a la región factible.

Problema 3

- Variables de decisión:

  TC_i : Tiempo dedicado a cantar en el Happy Hours i.
  TA_j : Tiempo dedicado a la cita j.
  TS : Tiempo dedicado a salvar alumnos.
  η : Mínimo tiempo de entre las citas, con la excepción de la última.

- Restricciones:

  1. No estar en un Happy Hours más del tiempo de duración de éste:

  $$TC_i \leq TH_i \qquad \forall i$$

  2. Evitar que cante en más de dos Happy Hours toda la duración de estos:

  $$TC_i + TC_q + TC_w \leq TH_i + TH_q + TH_w \qquad \forall i, q, w, \text{tal que } i \neq q \neq w$$

  3. No salvar más alumnos que M:

  $$CB \cdot TS \leq M$$

  4. No destinar más tiempo que el TA restante del año:

$$\sum_{i=1}^{I} TC_i + \sum_{j=1}^{J} TA_j + TS \leq TA$$

5. Hacer que el tiempo de la cita j sea mayor que la suma del tiempo empleado en todaslas citas antes de la j:

$$\sum_{m=1}^{j-1} TA_m \leq TA_j \qquad \forall j = 2,..., J-1$$

6. Hacer que la última cita dure menos que todo el resto.

$$TA_J \leq TA_j \qquad \forall j, \text{tal que } j \neq J$$

7. Encontrar el valor de η:

$$\eta \leq TA_j \qquad \forall j, \text{tal que } j \neq J$$

8. Naturaleza de las variables:

$$\begin{aligned} &TC_i \geq 0 \qquad \forall i \\ &TA_j \geq 0 \qquad \forall j \\ &TS, \eta \geq 0 \end{aligned}$$

- Función objetivo:

$$máx\ GOZO = \left\{ \sum_{i \in I} (BC_i \cdot TC_i) \right\} + \{BSLO \cdot (CB \cdot TS)\} + \{BA \cdot (\eta - TA_J)\}$$

Notar que es posible responder al mismo problema sin necesidad de definir la variable η, esto debido a las condiciones del problema. Dada la restricción (5) es posible darse cuenta inmediatamente que la variable TA_1 sería la de menor duración de entre todas las citas, con excepción de la última (J). Con esto, es posible reemplazar en las restricciones η por TA_1, con lo cual se obtiene una formulación diferente del problema, pero que entregaría la misma solución.

Dudas o comentarios a:
lelopez@ing.uchile.cl