



Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Civil Industrial.
IN34A Optimización
Semestre Primavera 2006

Profesores: Guillermo Durán.
Sebastián Souyris.
Richard Weber.
Auxiliares: Jaime Gacitúa.
Leonardo López.
Ximena Schultz.
Rodrigo Wolf.

Examen 22 de noviembre de 2006

Pregunta N° 1

- 1- (1,5 pts.) Explique qué es un algoritmo exacto y qué es una heurística para resolver un determinado problema. ¿En qué casos se debería usar cada uno? Relacione esta respuesta con lo estudiado sobre teoría de la complejidad computacional.
- 2- (1,5 pts.) Sea un problema de minimización irrestricta de una función $f \in C^2$ y sea un punto x donde el gradiente se anula. ¿Qué puede afirmar en caso que el Hessiano de f en x sea semidefinido positivo? ¿Qué puede afirmar en caso que el Hessiano de f en x sea definido positivo? Justifique en ambos casos.
- 3- (1,5 pts.) ¿Es cierto que todo óptimo de una función lineal está en un vértice del poliedro factible? ¿Es cierto que el algoritmo SIMPLEX es un algoritmo polinomial para programación lineal? ¿Es cierto que el problema de programación lineal es un problema polinomial? Justifique en cada caso.
- 4- (1,5 pts.) Explique en qué casos un problema de programación entera puede ser resuelto en forma exacta relajando la condición de integralidad de las variables.

Pregunta N° 2

Una línea aérea tiene 4 vuelos diarios a un destino determinado y en total 14 tripulantes disponibles para estos vuelos.

Por ley cada vuelo tiene que tener por lo menos 2 tripulantes; si se le asigna más tripulantes sube el beneficio para los pasajeros.

La siguiente tabla muestra el beneficio adicional de dicha asignación.

	3 tripulantes	4 tripulantes	5 tripulantes	6 tripulantes	7 tripulantes	8 tripulantes
Vuelo 1	15	18	20	25	27	30
Vuelo 2	16	20	21	22	28	29
Vuelo 3	17	18	19	23	29	29
Vuelo 4	6	9	10	12	13	14

Por ejemplo asignar 3 tripulantes al vuelo 2 genera un beneficio adicional de 16.

El problema consiste en determinar una asignación que maximice el beneficio adicional.

- a) Trate de reducir la complejidad del problema aplicando un análisis previo. Justifique su decisión.
- b) Resuelva el problema simplificado aplicando programación dinámica. Si no logra simplificar el problema resuelva el problema original aplicando programación dinámica.
- c) Identifique estados, etapas, variables de decisión, la función de transformación y la función de recursión.
- d) ¿Cuál(es) es (son) la(s) política(s) óptima(s)?

Pregunta N° 3

Considere una cadena de suministro con tres etapas de producción y T periodos. Al inicio de la cadena hay un conjunto de plantas A que producen el producto primario Pa , el cual alimenta al conjunto de plantas B , las cuales producen el producto intermedio Pb . También el producto Pa puede ser vendido a otro mercado externo Ma . De la misma forma, el producto Pb es la materia prima para el conjunto de plantas C y además puede ser vendido a otro mercado externo Mb . Las plantas C producen el producto final Pc , que es vendido al mercado Mc .

Las capacidades máximas de producción son Cap_j , $j \in \{A \cup B \cup C\}$. Las plantas tipo B y C pueden guardar inventario del producto **que producen** cuyas capacidades máximas de inventario son IM_j , $j \in \{B \cup C\}$, pudiendo cada planta almacenar productos por la cantidad de periodos que estime conveniente. El inventario inicial de cada planta es 0.

Cada planta posee diferente tecnología, la que queda expresada por el ratio de conversión tec_j , que indica el número de unidades que produce la planta $j \in \{B \cup C\}$ por cada unidad de materia prima recibida.

La política de venta de productos de la empresa es satisfacer el total de la demanda de los mercados Mb y Mc , y vende al mercado Ma solo la cantidad que le conviene. La demanda de cada mercado es D_{it} , $i \in \{Ma, Mb, Mc\}$; $t \in [1...T]$. El precio que se pagara por unidad del producto i en el periodo t es P_{it} ; $i \in \{Pa, Pb, Pc\}$; $t \in [1...T]$.

Los costos por unidad producida son cv_{jt} , $j \in \{A \cup B \cup C\}$; $t \in [1...T]$, y los costos de inventario son cin_{jt} , $j \in \{B \cup C\}$; $t \in [1...T]$ (en las plantas A no se puede almacenar inventario). Además hay un costo fijo cf_{jt} por utilizar la planta $j \in \{A \cup B \cup C\}$ en el periodo $t \in [1...T]$.

Modele el problema que encuentre los niveles óptimos de producción e inventario de forma tal de maximizar la utilidad de la empresa.

Indicación: No toda la información entregada es relevante para la modelación del problema.



Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Civil Industrial.
IN34A Optimización
Semestre Primavera 2006

Profesores: Guillermo Durán.
Sebastián Souyris.
Richard Weber.
Auxiliares: Jaime Gacitúa.
Leonardo López.
Ximena Schultz.
Rodrigo Wolf.

Pauta Examen 22 de noviembre de 2006

Pregunta N° 1

- 1- Un algoritmo es una secuencia finita de pasos que garantiza el encontrar una solución de un problema para una instancia dada. La complejidad de un algoritmo varía, pero puede llegar a ser muy complejo e impracticable de resolver computacionalmente. Es por ello que para resolver problemas muy complejos es mejor utilizar una heurística, que si bien no asegura llegar al óptimo, obtiene buenas soluciones en un tiempo razonable. En general en problemas polinomiales se suele usar algoritmos exactos y en problemas NP-completos (sobre todo de gran dimensión) se suelen usar heurísticas.

Nota de corrección: 0,5 por decir que es un algoritmo, 0,5 por decir que es una heurística. 0,5 por decir cuando usar cada una.

- 2- No puede decirse nada si es que el hessiano es semidefinido positivo, pues podría tratarse de un punto silla. Si es definido positivo puede afirmarse que se está ante un mínimo local. Esto se justifica por un teorema visto en clases para optimización irrestricta (no es necesario demostrar el teorema).

Nota de corrección: 0,75 por cada afirmación con su justificación.

- 3- En un problema lineal la solución es o bien un vértice del poliedro o una de sus aristas. El algoritmo SIMPLEX puede resultar ser exponencial si es que el número de vértices es exponencial y los recorre todos. Es cierto que el problema de programación lineal es un problema lineal pues siempre se puede encontrar un algoritmo que lo resuelva en tiempo polinomial (Khachyan y Karmarkar son dos de ellos).

Nota de corrección: 0, 5 por cada respuesta.

- 4- En el caso de que todos los vértices del poliedro factible sean enteros. Otra posibilidad es relajar, aplicar Simplex y si el óptimo da entero quiere decir que se podía relajar para obtener el óptimo del problema entero.

Pregunta N° 2

- a) Puede verse que nunca se pondrán 8 tripulantes en un vuelo ya que está dominado por poner 3 tripulantes en cada vuelo (y adicionalmente le sobran 2 tripulantes, que le reportarán beneficio adicional). La primera opción tiene como máximo un beneficio de 30, mientras que la segunda tiene un beneficio mínimo de 48.

Por otro lado, puede verse también que poner 7 tripulantes tiene un beneficio máximo de 45 (haciendo las combinaciones con 1 tripulante en otro vuelo), mientras que el beneficio por poner 1 adicional en cada vuelo (es decir 3 en total) tiene beneficio mínimo de 48 y aún quedan dos tripulantes por distribuir.

Nota de corrección: Estos dos casos bastan para tener los 1,5 pts. Si alguien elimina algo que afecta en la función objetivo, no se le descuenta en esta parte, sino que en la parte d) tiene 0 pts. Si alguien elimina el vuelo 4 pónganle 0,55 pts. (Es decir si eliminan esta y una más tienen en total 1,3 pts. en esta parte, pero van a tener 0 pts. en la parte d)).

- b) **Nota de corrección: Se encuentran la resolución simplificada (izquierda) y la completa (derecha). Estas están resueltas primero para el vuelo 4 y al final para el vuelo 1, sin embargo esto podía realizarse en el orden inverso sin ningún tipo de repercusión en la solución óptima y por ende está igual de bueno (de echo la solución de la última etapa debe ser igual, independiente del orden). Si simplificaron mal el problema igual tienen todo el puntaje si es que hicieron bien la resolución.**

Cada tabla tiene 0,5 pts. Si tienen algún error numérico se les descuenta 0,1 en la tabla por error numérico. No consideren errores de arrastre.

Las tablas se realizaron para la variable planteada en la parte c), sin embargo la variable podría haber sido cantidad de tripulantes a asignar. La resolución es análoga.

S ₄	x ₄ =0	x ₄ =1	x ₄ =2	x ₄ =3	x ₄ =4	V ₄ [*]	x ₄ [*]
6	0	6	9	10	12	12	4
5	0	6	9	10	12	12	4
4	0	6	9	10	12	12	4
3	0	6	9	10	-	10	3
2	0	6	9	-	-	9	2
1	0	6	-	-	-	6	1
0	0	-	-	-	-	0	0

S ₄	x ₄ =0	x ₄ =1	x ₄ =2	x ₄ =3	x ₄ =4	x ₄ =5	x ₄ =6	V ₄ [*]	x ₄ [*]
6	0	6	9	10	12	13	14	14	6
5	0	6	9	10	12	13	-	13	5
4	0	6	9	10	12	-	-	12	4
3	0	6	9	10	-	-	-	10	3
2	0	6	9	-	-	-	-	9	2
1	0	6	-	-	-	-	-	6	1
0	0	-	-	-	-	-	-	0	0

S ₃	x ₃ =0	x ₃ =1	x ₃ =2	x ₃ =3	x ₃ =4	V ₃ [*]	x ₃ [*]
6	14	30	30	29	32	35	1-2
5	13	29	28	25	29	29	1-4
4	12	27	27	25	23	27	1-2
3	11	26	24	19	-	26	1
2	10	23	18	-	-	23	1
1	9	17	-	-	-	17	1
0	6	-	-	-	-	0	0

S ₃	x ₃ =0	x ₃ =1	x ₃ =2	x ₃ =3	x ₃ =4	x ₃ =5	x ₃ =6	V ₃ [*]	x ₃ [*]
6	14	30	30	29	32	35	29	35	5
5	13	29	28	28	29	29	-	29	1-4-5
4	12	27	27	25	23	-	-	27	1-2
3	10	26	24	19	-	-	-	26	1
2	9	23	18	-	-	-	-	23	1
1	6	17	-	-	-	-	-	17	1
0	0	-	-	-	-	-	-	0	0

S ₂	x ₂ =0	x ₂ =1	x ₂ =2	x ₂ =3	x ₂ =4	V ₂ [*]	x ₂ [*]
6	35	45	47	47	45	47	2-3
5	29	43	46	44	39	46	2
4	27	42	43	38	22	43	2
3	26	39	37	21	-	39	1
2	23	33	20	-	-	33	1
1	17	16	-	-	-	17	0
0	0	-	-	-	-	0	0

S ₂	x ₂ =0	x ₂ =1	x ₂ =2	x ₂ =3	x ₂ =4	x ₂ =5	x ₂ =6	V ₂ [*]	x ₂ [*]
6	35	45	47	47	45	45	29	47	2-3
5	29	43	46	44	39	28	-	46	2
4	27	42	43	38	22	-	-	43	2
3	26	39	37	21	-	-	-	39	1
2	23	33	20	-	-	-	-	33	1
1	17	16	-	-	-	-	-	17	0
0	0	-	-	-	-	-	-	0	0

S ₁	x ₁ =0	x ₁ =1	x ₁ =2	x ₁ =3	x ₁ =4	V ₁ [*]	x ₁ [*]
6	47	61	61	59	58	61	1-2

S ₁	x ₁ =0	x ₁ =1	x ₁ =2	x ₁ =3	x ₁ =4	x ₁ =5	x ₁ =6	V ₁ [*]	x ₁ [*]
6	47	61	61	59	58	44	30	58	1-2

c) Etapas: $v=1,2,3,4$ (vuelos) **(0,2 ptos.)**

Variables de decisión: X_v = Cantidad de tripulantes extra ha asignar en el vuelo v. **(0,4 ptos.)**

Variables de estado: S_v = Cantidad de tripulantes que quedan para asignar al vuelo v. **(0,4 ptos.)**

Recurrencia o función de transformación: $S_{v+1} = S_v - X_v$ **(0,2 ptos.)**

Función de recursión: $V_v(X_v, S_v) = BA(X_v) + V_{v+1}^*(S_{v+1})$ **(0,5 pto.)**

Función de beneficio: $V_v^*(S_v) = \max_{\substack{X_v \\ s.a. X_v \leq S_v}} \{V_v(X_v, S_v)\}$ **(0,2 ptos.)**

Condiciones de Borde: $V_5^* = 0$ **(0,05 pto.)**

$S_1^* = 6$ **(0,05 pto.)**

Nota de corrección: La variable puede haber sido cantidad de tripulantes ha asignar en total. En este caso se debe exigir en las restricciones que la variable sea mayor o igual a dos para todos los vuelos, adicionalmente la condición de borde para la cantidad de tripulantes inicial cambia a 14.

BA se refiere al beneficio adicional que reporta asignar tal cantidad extra de tripulantes al vuelo en cuestión.

La recurrencia es parte de la función de recursión, por lo que no es necesario ponerla separada explícitamente si es que la función de recursión la incluye esto es, si en vez de decir $+V_{v+1}^*(S_{v+1})$, dice $+V_{v+1}^*(S_v - X_v)$.

Las condiciones de borde así como la restricción (que vale 0,1, que están incluidos en los 0,2) son parte de la función objetivo.

d) Existen dos políticas óptimas, estas son:

x_1^*	1
x_2^*	2
x_3^*	1
x_4^*	2

x_1^*	2
x_2^*	2
x_3^*	1
x_4^*	1

Y reportan un beneficio adicional de 61.

Nota de corrección: 0,25 cada una. Binarias por separado: Tienen que estar completamente bien cada una, sino cero.

Pregunta N° 3

Variables: (1 pto.)

- x_{jt} = Cantidades producidas en planta $j \in A$ en t .
- y_{jt} = Cantidades producidas en planta $j \in B$ en t .
- z_{jt} = Cantidades producidas en planta $j \in C$ en t . **(0,2 ptos. por las 3 que pueden resumirse en 1).**
- $X_{jt} \begin{cases} \text{Si se produce en planta } j \in A \text{ en } t. \\ \text{Si no.} \end{cases}$
- $Y_{jt} \begin{cases} \text{Si se produce en planta } j \in B \text{ en } t. \\ \text{Si no.} \end{cases}$
- $Z_{jt} \begin{cases} \text{Si se produce en planta } j \in C \text{ en } t. \\ \text{Si no.} \end{cases}$ **(0,2 ptos. por las 3).**
- w_{jkt} = Cantidades transportadas desde $j \in A$ a $k \in B$ en t .
- q_{jkt} = Cantidades transportadas desde $j \in B$ a $k \in C$ en t . **(0,2 ptos. por estas 2)**
- I_{jt} = Inventario en $j \in \{B \cup C\}$ en t . **(0,2 ptos.)**
- va_{jt} = Venta de Pa por planta $j \in A$ en t .
- vb_{jt} = Vente de Pb por planta $j \in B$ en t .
- vc_{jt} = Venta de Pc por planta $j \in C$ en t . **(0,2 ptos. por las 3)**

Restricciones: (4 ptos.)

- Capacidad máxima de producción y ligazón de variables. **(0,6 ptos.)**

$$x_{jt} \leq Cap_j \cdot X_{jt} \quad \forall j \in A, t = 1, \dots, T$$

$$y_{jt} \leq Cap_j \cdot Y_{jt} \quad \forall j \in B, t = 1, \dots, T$$

$$z_{jt} \leq Cap_j \cdot Z_{jt} \quad \forall j \in C, t = 1, \dots, T$$

- Capacidad máxima de inventario. **(0,2 ptos.)**

$$I_{jt} \leq IM_j \quad \forall j \in \{B \cup C\}, t = 1, \dots, T$$

- Capacidad máxima de inventario. **(1 pto.)**

$$y_{kt} = \left(\sum_{j \in A} w_{jkt} \right) \cdot tec_k \quad \forall k \in B, t = 1, \dots, T$$

$$z_{kt} = \left(\sum_{j \in A} q_{jkt} \right) \cdot tec_k \quad \forall k \in C, t = 1, \dots, T$$

- Conservación de flujo en plantas. **(1 pto.)**

$$x_{jt} = \sum_{k \in B} w_{jkt} + va_{jt} \quad \forall j \in A, t = 1, \dots, T$$

$$y_{jt} + I_{jt-1} = \sum_{k \in C} q_{jkt} + I_{jt} + vb_{jt} \quad \forall j \in B, t = 1, \dots, T$$

$$z_{jt} + I_{jt-1} = I_{jt} + vc_{jt} \quad \forall j \in C, t = 1, \dots, T$$

- Demanda. **(1 pto.)**

$$\sum_{j \in A} va_{jt} \leq D_{Mat} \quad \forall t = 1, \dots, T$$

$$\sum_{j \in B} vb_{jt} = D_{Mbt} \quad \forall t = 1, \dots, T$$

$$\sum_{j \in C} vc_{jt} = D_{Mct} \quad \forall t = 1, \dots, T$$

- Naturaleza de las variables. **(0,2 ptos.)**

$$x_{jt} \geq 0 \quad \forall j \in A, t = 1, \dots, T$$

$$y_{jt} \geq 0 \quad \forall j \in B, t = 1, \dots, T$$

$$z_{jt} \geq 0 \quad \forall j \in C, t = 1, \dots, T$$

$$X_{jt} \in \{0,1\} \quad \forall j \in A, t = 1, \dots, T$$

$$Y_{jt} \in \{0,1\} \quad \forall j \in B, t = 1, \dots, T$$

$$Z_{jt} \in \{0,1\} \quad \forall j \in C, t = 1, \dots, T$$

$$w_{jkt} \geq 0 \quad \forall j \in A, k \in B, t = 1, \dots, T$$

$$q_{jkt} \geq 0 \quad \forall j \in B, k \in C, t = 1, \dots, T$$

$$I_{jt} \geq 0 \quad \forall j \in \{B \cup C\}, t = 1, \dots, T$$

$$va_{jt} \geq 0 \quad \forall j \in A, t = 1, \dots, T$$

$$vb_{jt} \geq 0 \quad \forall j \in B, t = 1, \dots, T$$

$$vc_{jt} \geq 0 \quad \forall j \in C, t = 1, \dots, T$$

Función Objetivo: (1 pto.)

$$\max z = \sum_t \left[\left(\sum_{j \in A} va_{jt} \right) \cdot P_{Pat} - \sum_{j \in A} (x_{jt} \cdot cv_{jt} + X_{jt} \cdot cf_{jt}) - \sum_{j \in B} (y_{jt} \cdot cv_{jt} + Y_{jt} \cdot cf_{jt} + I_{jt} \cdot cinv_{jt}) \right. \\ \left. - \sum_{j \in C} (z_{jt} \cdot cv_{jt} + Z_{jt} \cdot cf_{jt} + I_{jt} \cdot cinv_{jt}) \right]$$

Nota de corrección: En las restricciones es importante que indiquen los para todo, y sobre que índices se está sumando en las sumatorias, descuentos 0,1 por cada error así en las restricciones y en la función objetivo.

La naturaleza de las variables está buena si la ponen para las variables que se definieron, sin importar si les faltan variables.

En la función objetivo puede ir el beneficio obtenido por la venta de productos intermedios.

Dudas y/o Comentarios
xschultz@ing.uchile.cl